УДК 517.521.8

О тауберовых теоремах для одного класса регулярных матриц

А. И. Соколенко

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с комплексными членами a_n $(n=1, 2, \ldots)$ и $A=\|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная матрица с комплексными элементами a_{nk} $(n=1,2,\ldots;$ $k=1,2,\ldots,n)$. Введем обозначения: $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n=\sum_{k=1}^{n} a_{nk}S_k$ $(n=1,2,\ldots)$. Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} t_n=S$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется матрицей $A=\|a_{nk}\|$ (A-суммируется) к числу S и записывают

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(A). \tag{1}$$

Если $t_n=O(1)$, то записывают

$$S_n = O(1)\ (A). \tag{2}$$

Матрицы, суммирующие каждый сходящийся ряд к его сумме, называют регулярными [1, стр. 62]. Условие (1) ((2)), вообще говоря, не влечет сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left(\text{ограниченности частных сумм ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$. Предложения, дающие положительное решение данных вопросов, принято называть теоремами тауберова типа. Условия, которые при этом налагают на члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или его частные суммы, называют тауберовыми [1, стр. 156].

В данной заметке рассматривается вопрос о тауберовых теоремах для одного класса нижних треугольных регулярных матриц, включающего матрицы Чезаро любого порядка $\alpha \geqslant 1$.

Будем рассматривать нижние треугольные регулярные матрицы $A=\|a_{nk}\|$, для которых

$$|a_{nk}| \leqslant \frac{H}{n}, \tag{3}$$

где H не зависит от n и k.

Этот класс матриц содержит, например, матрицы Чезаро любого порядка $\alpha \geqslant 1$. В самом деле, матрица средних Чезаро любого порядка $\alpha > -1$ определяется следующим образом [2, стр. 84]:

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\ (0 \leqslant k \leqslant n),\ \text{где}\ A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}$$

$$(n \geqslant 1), \quad A_0^{\alpha} = 1.$$

Если $\alpha \geqslant 1$, то имеем

$$a_{nk} = \frac{n!\,\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-k-1)}{(n-k)!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

При рассмотрении тауберовых теорем для матриц класса (3) требование выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1 \qquad (n \geqslant n_0) \tag{4}$$

не сужает класса рассматриваемых матриц, так как в случае, когда матрица $A = \| a_{nk} \|$ не удовлетворяет условию (4), ее можно заменить равносильной матрицей $B = \| b_{nk} \|$, где $b_{nk} = \dfrac{a_{nk}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}}$ $(n \geqslant n_0)$ и $b_{nk} = 0$ $(n < n_0)$, для которой условие, соответствующее условию (4), выполнено, причем эта матрица принадлежит классу матриц (3). Поэтому условие (4) в дальнейшем будем предполагать выполненным *.

Лемма. *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и регулярная матрица* $A = \| a_{nk} \|$ *класса* (3) *и пусть* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} S_k$ *и* $\tau_n = S_n - t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Тогда справедливо неравенство

$$|\tau_n| \leqslant \frac{H}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu |a_\nu| \qquad (n \geqslant n_0), \tag{5}$$

где H — *абсолютная константа.*

Доказательство. Используя (4), имеем

$$\tau_n = S_n - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} S_k = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{k=\nu}^{n} a_{nk} = \sum_{\nu=2}^{n} a_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{nk} \qquad (n \geqslant n_0).$$

Отсюда получаем

$$|\tau_n| = \left| \sum_{\nu=2}^{n} a_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} a_{nk} \right| \leqslant \sum_{\nu=2}^{n} |a_\nu| \sum_{k=1}^{\nu-1} |a_{nk}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=2}^{n} |a_\nu| \frac{H}{n} (\nu - 1) \leqslant \frac{H}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu |a_\nu| \qquad (n \geqslant n_0).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и регулярная матрица* $A = \| a_{nk} \|$ *класса* (3).

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S(A)$ *и* $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. *Если* $S_n = O(1)\,(A)$ *и* $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, *то* $S_n = O(1)$.

---

* Определение равносильности матриц см., например, [1, стр. 91].

Справедливость теоремы 1 вытекает из леммы.

Теорема 1 является точной в следующем смысле: тауберово условие $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ в этой теореме нельзя заменить условием $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказательство этого утверждения вытекает из рассмотрения следующего примера матрицы и ряда: $A = \| a_{nk} \|$, где $a_{nk} = 2^{-m}$, если $1 \leqslant k \leqslant 2^m$, и $a_{nk} = 0$, если $k > 2^m$ для $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = 0$ для $1 \leqslant n \leqslant 4$, $a_n = 2^{2-m}$ для $n = 2^m$, $m = 3, 4, \ldots$, $a_n = 2^{1-m}$ для $2^m < n \leqslant 5 \cdot 2^{m-2}$ и $7 \cdot 2^{m-2} < n < 2^{m+1}$, $m = 2, 3, \ldots$ и $a_n = -2^{1-m}$ для $5 \cdot 2^{m-2} < n \leqslant 7 \cdot 2^{m-2}$, $m = 2, 3, \ldots$.

Рассматриваемая матрица является регулярной матрицей класса (3). Действительно, если $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, то $0 \leqslant n a_{nk} \leqslant (2^{m+1} - 1)\, 2^{-m} < 2$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Для данного ряда $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. В самом деле, если $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$, то $n\,|a_n| \leqslant 2^{m+1} \cdot 2^{1-m} = 4$ $(m = 2, 3, \ldots)$.

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность частных сумм рассматриваемого ряда. Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} S_n = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

поэтому для $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ имеем

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{2^m} a_{nk} S_k = 2^{-m} \cdot \sum_{k=2}^{2^m} S_k = 0,$$

а значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0\,(A)$.

Утверждение будет доказано, если покажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд. Последнее вытекает из легко проверяемых равенств

$$S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ если } n = 5 \cdot 2^{m-2}, \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } n = 7 \cdot 2^{m-2} \end{cases} \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пусть даны ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и регулярная матрица $A = \| a_{nk} \|$ класса* (3).

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S\,(A)$, $a_n = 0$ для $n \neq n_k$, $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и $a_{n_k} = o\,(1)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Доказательство. Если $n \geqslant n_0$ (см. лемму) и $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то в силу (5) имеем

$$|\tau_n| \leqslant \frac{H}{n_k} \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu |a_{n_\nu}| \leqslant H \sum_{\nu=1}^{k} \lambda^{\nu-k} |a_{n_\nu}| \equiv \alpha_k.$$

Так как $\sum_{\nu=1}^{k} \lambda^{\nu-k} < \frac{\lambda}{\lambda-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$ и для любого фиксированного ν $\lambda^{\nu-k} \to 0$ $(k \to \infty)$, то по известной теореме [1, теорема 4] получаем $\alpha_k \to 0$ $(k \to \infty)$, а значит, $\tau_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Теорема доказана.

Условие $a_{n_k} = o(1)$ в теореме 2 является существенным.

Доказательство этого утверждения вытекает из рассмотрения следующего примера матрицы и ряда: $A = \| a_{nk} \|$, где $a_{11} = 1$, $a_{nk} = 2^{-3m-1}$, если $1 \leqslant k \leqslant 2^{3m+1}$, и $a_{nk} = 0$, если $k > 2^{3m+1}$ для $2^{3m+1} \leqslant n < 2^{3m+4}$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = 0$ для $n \neq n_k = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, $a_{n_1} = 1$, $a_{n_k} = 1\frac{1}{4}$, если $k = 3p + 1$, $p = 1, 2, \dots$, $a_{n_k} = -1$, если $k = 3p + 2$, $p = 0, 1, 2, \dots$, и $a_{n_k} = -\frac{1}{4}$, если $k = 3p + 3$, $p = 0, 1, 2, \dots$.

Рассматриваемая матрица является регулярной матрицей класса (3). Действительно, если $2^{3m+1} \leqslant n < 2^{3m+4}$, то $0 \leqslant n a_{nk} \leqslant (2^{3m+4} - 1)\, 2^{-3m-1} < 8$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$.

Данный ряд — ряд того же вида, что и в теореме 2, однако $a_{n_k} \neq o(1)$.

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность частных сумм рассматриваемого ряда. Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=2^{3m+1}+1}^{2^{3m+4}} S_n = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

поэтому для $2^{3m+1} \leqslant n < 2^{3m+4}$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$ имеем

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{2^{3m+1}} a_{nk} S_k = 2^{-3m-1} \left(1 + \sum_{k=3}^{2^{3m+1}} S_k \right) = 2^{-3m-1},$$

а значит, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0\,(A)$.

Утверждение будет доказано, если покажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд. Последнее вытекает из легко проверяемых равенств

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2^{3m+1}, \\ -\frac{1}{4}, & \text{если } n = 2^{3m+1} - 1 \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \dots).$$

Утверждение доказано.

Теорема 3. *Пусть даны ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $A = \| a_{nk} \|$ — регулярная матрица класса (3).*

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(A)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}|a_n|^\alpha < \infty$ *для какого-нибудь* $\alpha > 1$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует номер k такой, что $\sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{\alpha-1}|a_\nu|^\alpha < \left(\frac{\varepsilon}{2H}\right)^\alpha$. Тогда по неравенству Гельдера для любого n имеем

$$\frac{H}{n}\sum_{\nu=k+1}^{n} \nu|a_\nu| = \frac{H}{n}\sum_{\nu=k+1}^{n} \nu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}|a_\nu|\cdot\nu^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant H\left[\sum_{\nu=k+1}^{n} \left(\nu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}|a_\nu|\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{\nu=k+1}^{n} \nu^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant H\left(\sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{\alpha-1}|a_\nu|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant H\cdot\frac{\varepsilon}{2H} = \frac{\varepsilon}{2},$$

так как $\frac{1}{n}\left(\sum_{\nu=k+1}^{n} \nu^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} < 1$. Поэтому в силу (5) получаем

$$|\tau_n| \leqslant \frac{H}{n}\sum_{\nu=1}^{k} \nu|a_\nu| + \frac{H}{n}\sum_{\nu=k+1}^{n} \nu|a_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n > N).$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Н. А. Давыдову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.
2. Р. Кук, Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, Физматгиз, М., 1960.

Поступила 26.IV 1973 г.
Киевский педагогический институт