УДК 517.948:513.88

Об одном классе уравнений с функциональными производными

М. С. Сявавко, П. П. Мельничак

1. Пусть X — нормированное пространство, R — действительная прямая, а $U(x)$ — функционал на X. Производную Фреше и функциональную производную порядка k ($k = 1, 2, \ldots, n$) функционала $U(x)$ (определение см. в [1, 2]) будем обозначать соответственно символами $U^{(k)}_{x\ldots x}$ и $\dfrac{\delta^k u}{\delta x(\tau_1)\ldots\delta x(\tau_k)}$.

В данной работе рассматривается особый класс уравнений в функциональных производных — линейное однородное уравнение вида

$$L\left(\frac{\delta}{\delta x(\cdot)}\right)U = U^{(n)}_{x\ldots x}x^n + P_1(x)\,U^{(n-1)}_{x\ldots x}x^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\,U'_x x + P_n(x)\,U = 0, \tag{1}$$

где для сжатости записано $U^{(k)}_{x\ldots x}\ x^k$ вместо $U^{(k)}_{x\ldots x}\ \underbrace{x\ldots x}_{k\ \text{раз}}$. В случае, когда $X = X(T)$—некоторое нормированное пространство действительных функций, определенных на подмножестве T действительного пространства R^n, то уравнение (1) можно записать в условно традиционной форме, а именно:

$$\int_T\ldots\int_T \frac{\delta^n U}{\delta x(\tau_1)\ldots\delta x(\tau_n)}\,x(\tau_1)\ldots x(\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n +$$

$$+ P_1(x)\int_T\ldots\int_T \frac{\delta^{n-1}U}{\delta x(\tau_1)\ldots\delta x(\tau_{n-1})}\,x(\tau_1)\ldots x(\tau_{n-1})\,d\tau_1\ldots d\tau_{n-1} + \ldots$$

$$+ P_{n-1}(x)\int_T \frac{\delta U}{\delta x(\tau_1)}\,x(\tau_1)\,d\tau_1 + P_n(x)\,U = 0. \tag{1'}$$

В уравнениях (1) и (1′) $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ — некоторые непрерывные функционалы, а $U(x)$—искомый функционал. Оператор $L\left(\dfrac{\delta}{\delta x(\cdot)}\right)$ обладает следующим свойством:

$$L\left(\frac{\delta}{\delta x(\cdot)}\right)[H_1^0(x)\,U_1(x) + H_2^0(x)\,U_2(x)] = H_1^0(x)\,L\left(\frac{\delta}{\delta x(\cdot)}\right)U_1(x) +$$

$$+ H_2^0(x)\,L\left(\frac{\delta}{\delta x(\cdot)}\right)U_2(x),$$

где $U_1(x)$ и $U_2(x)$ — функционалы, n раз непрерывно дифференцируемые в точке $x \neq 0$ некоторой области D по радиальному направлению, а $H_1^0(x)$ и $H_2^0(x)$ — однородные функционалы нулевого порядка, n раз непрерывно дифференцируемые в точке $x \neq 0$ некоторой области D. Это доказывается на основании аддитивности функциональных производных и соотношения

$$[H_i^0(x)\,U_i(x)]^{(i)}_{x\ldots x}x^i = H_i^0(x)\,U^{(i)}_{x\ldots x}x^i, \tag{2}$$

которое получается дифференцированием по t равенства $H_j^0(tx)\,U_j(tx) = H_j^0(x)\,U_j(tx)$ (см. [3]). Значит, в дальнейшем класс однородных функционалов нулевого порядка, n раз непрерывно дифференцируемых в точке $x \neq 0$ некоторой области D по радиальному направлению, играет роль «постоянных» величин. Этот класс обозначим через $\{H^0(x)\}$.

Определение. Функционалы $U_1(x), \ldots, U_n(x)$, которые определены в области $D \subset X$ назовем «0-линейно независимыми», если в классе $\{H^0(x)\}$ нет однородных функционалов $H_1^0(x), \ldots, H_n^0(x)$, отличных от нуля, таких, что $H_1^0(x)\,U_1(x) + H_2^0(x)\,U_2(x) + \ldots + H_n^0(x)\,U_n(x) = 0$ в области D.

В противном случае, если такие функционалы $H_i^0(x)$ в классе $\{H^0(x)\}$ существуют, то скажем, что $U_1(x), \ldots, U_n(x)$ — «0-линейно зависимые».

Составим функционал

$$W[x] = \begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) & \dots & U_n(x) \\ U'_{1,x}(x)\,x & U'_{2,x}(x)\,x & \dots & U'_{n,x}(x)\,x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U^{(n-1)}_{1,x\dots x}(x)\,x^{n-1} & U^{(n-1)}_{2,x\dots x}(x)\,x^{n-1} & \dots & U^{(n-1)}_{n,x\dots x}(x)\,x^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Легко убедиться, что имеет место следующая лемма.

Л е м м а 1. *Если в области $D \subset X$ функционалы $U_1(x), \dots, U_n(x)$ «0-линейно зависимые», то вронскиан $W[x]$ равен нулю в области D.*

Систему $U_1(x), \dots, U_n(x)$ «0-линейно независимых» решений уравнения (1) назовем фундаментальной системой этого уравнения.

Л е м м а 2. *Пусть функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

а) *$\varphi(x)$ непрерывен по x при $\|x - x_0\| \leqslant a$ и $\varphi(x_0) = 0$;*

б) *функционал $\varphi(x)$ при тех же значениях аргумента x имеет производную Фреше φ'_x, непрерывную по норме операторов в точке x_0 и такую, что $\varphi'_x(x_0)\,x_0 \neq 0$.*

Тогда существуют такие числа α и $\beta > 0$, что для каждого x из шара $\|x - x_0\| \leqslant \alpha$ уравнение

$$\varphi(xe^{-s}) = 0 \tag{4}$$

имеет на отрезке $|s| \leqslant \beta$ единственное решение

$$e^s = H(x), \tag{5}$$

где $H(x)$ — однородный первого порядка положительный и непрерывный функционал.

Существование, единственность и непрерывность решения (5) уравнения (4) следуют из условий леммы, которые позволяют применить локальную теорему о неявной функции.

При $t \neq 0$ из $\varphi\left(\dfrac{x}{e^s}\right) = 0$ следует $\varphi\left(\dfrac{tx}{te^s}\right) = 0$, откуда $te^s = H(tx)$, т. е. $tH(x) = H(tx)$.

Положительность функционала $H(x)$ является следствием его непрерывности и того, что $H(x_0) = 1$.

В качестве многообразия $\varphi(x) = 0$ можно выбрать, например, в пространстве X гиперплоскость $f(x) - c = 0$, где $f(x)$ — линейный функционал на X и $c \neq 0$, или, если $X \equiv H$ — гильбертово пространство, то гиперсферу $\|x\| = R$, где $R \neq 0$.

Назовем задачей Коши для уравнения (1) нахождение функционала $U(x)$ в некоторой области D по уравнению (1) и краевым условиям

$$U(x)\big|_{\varphi(x)=0} = \Psi_1(x),\ U'(x)\,x\big|_{\varphi(x)=0} = \Psi_2(x), \dots, U^{(n-1)}(x)\,x^{n-1}\big|_{\varphi(x)=0} = \Psi_{n-1}(x), \tag{6}$$

где функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, а $\Psi_1(x), \dots, \Psi_{n-1}(x)$ n раз непрерывно дифференцируемые по радиальному направлению в любой точке, удовлетворяющей уравнению $\varphi(x) = 0$.

Прежде всего нужно установить единственность решения этой задачи. Для этого воспользуемся следующим приемом. Пусть P — конечномерный проектор в X ($P^2 = P$, $\dim P_x < \infty$). Рассмотрим в конечномерном пространстве P_x функцию $U_p(x) = U(P_x)$. Нетрудно проверить справедливость равенства

$$U^{(k)}(P_x)(P_x)^k = U_p^{(k)}(P_x)(P_x)^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Подставляя в (1) и (6) P_x вместо x, получим аналогичную задачу в конечномерном пространстве относительно функции $U_p(x)$. При рассматриваемых условиях решение такой конечномерной задачи единственно. Отсюда немедленно следует единственность и для исходной задачи. Действительно, если $U(x)$ — нетривиальное решение этой задачи, соответствующее нулевым начальным условиям, то в какой-нибудь точке x_0 вблизи начального многообразия $U(x_0) \neq 0$. Но тогда найдется проектор P, для которого $U(P_{x_0}) \neq 0$, что противоречит единственности конечномерной задачи.

В качестве критерия фундаментальности системы «0-линейно независимых» решений уравнения (1) приведем следующую теорему.

Теорема 1 (аналог теоремы Лиувилля). *Пусть функционал* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 2. *Если вронскиан* $W[x]$, *составленный для системы* $U_1(x), \ldots, U_n(x)$ *решений уравнения* (1), *не равен нулю для всех* x, *удовлетворяющих многообразию* $\varphi(x) = 0$, *то он не равен нулю в каждой точке области* D.

Действительно, продифференцировав по t равенство

$$W[tx] = t^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} U_1(tx) & U_2(tx) & \ldots & U_n(tx) \\ U_1'(tx)\,x & U_2'(tx)\,x & \ldots & U_n'(tx)\,x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_1^{(n-1)}(tx)\,x^{n-1} & U_2^{(n-1)}(tx)\,x^{n-1} & \ldots & U_n^{(n-1)}(tx)\,x^{n-1} \end{vmatrix}$$

и подставив $t = 1$, получим

$$W'x = \left[\frac{n(n-1)}{2} - P_1(x)\right] W. \tag{7}$$

Найдем решение последнего уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$W[x]\big|_{\varphi(x)=0} = W_0[x]. \tag{8}$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде

$$W[x] = W_0\left[\frac{x}{H(x)}\right] [H(x)]^{\frac{n(n-1)}{2}} \exp\left(-\int_1^{H(x)} P_1\left(\frac{x}{H(x)}\xi\right)\frac{d\xi}{\xi}\right).$$

В силу единственности оно и представляет собой вронскиан. Наконец заметим, что функции вида $\dfrac{x}{H(x)}$ удовлетворяют условию $\varphi\left(\dfrac{x}{H(x)}\right) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $U_1(x), \ldots, U_n(x)$ — *фундаментальная система решений уравнения* (1). *Тогда общее решение этого уравнения имеет вид*

$$U(x) = H_1^0(x)\,U_1(x) + H_2^0(x)\,U_2(x) + \ldots + H_n^0(x)\,U_n(x), \tag{9}$$

где $H_1^0(x), \ldots, H_n^0(x)$ *принадлежат классу* $\{H^0(x)\}$.

Функционал вида (9) позволяет решить задачу Коши (6). Действительно, применяя к последнему равенству $n - 1$ операцию дифференцирования по радиальному направлению, имеем

$$H_1^0(x)U_1(x)|_{\frac{x}{H(x)}} + H_2^0(x)U_2(x)|_{\frac{x}{H(x)}} + \ldots + H_n^0(x)U_n(x)|_{\frac{x}{H(x)}} = \Psi_1\left(\frac{x}{H(x)}\right),$$

$$H_1^0(x)U_1'(x)x|_{\frac{x}{H(x)}} + H_2^0(x)U_2'(x)x|_{\frac{x}{H(x)}} + \ldots$$
$$\ldots + H_n^0(x)U_n'(x)x|_{\frac{x}{H(x)}} = \Psi_2\left(\frac{x}{H(x)}\right), \tag{10}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_1^0(x)U_1^{(n-1)}(x)x^{n-1}|_{\frac{x}{H(x)}} + H_2^0(x)U_2^{(n-1)}(x)x^{n-1}|_{\frac{x}{H(x)}} + \ldots$$
$$\ldots + H_n^0(x)U_n^{(n-1)}(x)x^{n-1}|_{\frac{x}{H(x)}} = \Psi_{n-1}\left(\frac{x}{H(x)}\right).$$

Из этой системы однозначно определим функционалы для всех $x \in D$

$$H_i^0(x) = \frac{B_i\left(\frac{x}{H(x)}\right)}{W\left|\frac{x}{H(x)}\right|},$$

где B_i — детерминант, полученный после замены i-го столбца вронскиана W столбцом функционалов правой части системы (10).

2. Рассмотрим уравнение

$$U_{x\ldots x}^{(n)}x^n + P_1^0(x)U_{x\ldots x}^{(n-1)}\cdot x^{n-1} + \ldots + P_{n-1}^0(x)U_x'x + P_n^0(x)U = 0, \tag{11}$$

которое является функциональным аналогом уравнения Эйлера, где $P_1^0(x), \ldots, P_n^0(x)$ — однородные функционалы нулевого порядка из класса $\{H^0(x)\}$. Обозначим через $E_{k_1\ldots k_p}$ некоторое подмножество области D, на котором существуют корни характеристического уравнения

$$k(k-1)\ldots(k-n+1) + P_1^0(x)k(k-1)\ldots(k-n+2) + \ldots$$
$$\ldots + P_{n-1}^0(x)k + P_n^0(x) = 0. \tag{12}$$

Это подмножество есть область. Пусть $k_i^0(x)$ — корень характеристического уравнения (12) кратности m_i, где $i = 1, 2, \ldots, p$; $m_i \geqslant 1$; $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$.

Теорема 3. *Функционалы*

$$U_{ij}(x) = U_{k_i^0(x)}(x)\,[\ln H(x)]^{m_i - j}, \tag{13}$$

где $U_{k_i^0(x)}(x)$ и $H(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемые в точке $x \neq 0$ некоторой области D по радиальному направлению однородные функционалы порядка соответственно $k_i^0(x)$ и 1 ($j = 1, 2, \ldots, m_i$), образуют фундаментальную систему решений уравнения (11).

Кроме того, заметим, что каждой паре комплексных корней $\alpha^0(x) \pm \pm i\beta^0(x)$ характеристического уравнения (12) соответствует два частичных решения уравнения (11), которые имеют вид:

$$U_1(x) = H_{\alpha^0(x)}(x)\cos\beta^0(x)\ln H(x), \qquad U_2(x) = H_{\alpha^0(x)}(x)\sin\beta^0(x)\ln H(x),$$

где $H_{\alpha^0(x)}(x)$ и $H(x)$ — дифференцируемые функционалы порядка однородности соответственно $\alpha^0(x)$ и 1.

3. Рассмотрим другой частичный случай уравнения (1), а именно уравнение вида

$$U^{(n)}_{x\ldots x}x^n + P_1(H(x))\,U^{(n-1)}_{x\ldots x}x^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(H(x))\,U'_x x + P_n(H(x))\,U = 0, \quad (14)$$

где $P_1, \ldots, P_n$ — обыкновенные непрерывные функции, а $H(x)$ — однородный первого порядка n раз дифференцируемый по радиальному направлению в точке $x \neq 0$ функционал. Параллельно с (14) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, в котором те же функции, что и в (14):

$$t^n \frac{d^n f}{dt^n} + P_1(t)\, t^{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \ldots + P_n(t) f = 0. \quad (15)$$

Будем считать, что функции $P_i(t)$ непрерывные на интервале $[t_1, t_2]$, который покрывает множество $H(x)$, когда $x \in D$.

Теорема 4. *Если* $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — *линейно независимые решения уравнения* (15), *то функционалы* $f_1(H(x)), \ldots, f_n(H(x))$ *составляют систему фундаментальных решений уравнения* (14).

Это вытекает из того, что $U^{(i)}_{x\ldots x}(H(x))\, x^i = \dfrac{d^i U}{dt^i}\, t^i$ при $H(x) = t$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} U_1(H(x)) & U_2(H(x)) & \ldots & U_n(H(x)) \\ U'_{1,x}(H(x)) & U'_{2,x}(H(x)) & \ldots & U'_{n,x}(H(x)) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ U^{(n-1)}_{1,x\ldots x}(H(x)) & U^{(n-1)}_{2,x\ldots x}(H(x)) & \ldots & U^{(n-1)}_{n,x\ldots x}(H(x)) \end{vmatrix} =$$

$$= t^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_n(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & \ldots & f'_n(t) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Как пример рассмотрим функциональный аналог уравнения Бесселя

$$U''_{xx}x^2 + U'_x x + [H^2(x) - \mu^2]\,U = 0, \quad (16)$$

где $H(x)$ — однородный первого порядка в точке $x \neq 0$ дифференцируемый в радиальном направлении функционал, μ — постоянное действительное число. Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$U(x) = H_1^0(x)\, J_\mu\,[H(x)] + H_2^0(x)\, Y_\mu\,[H(x)],$$

где $J_\mu(t)$ и $Y_\mu(t)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода, $H_1^0(x)$ и $H_2^0(x) \in \{H^0(x)\}$.

Пользуясь случаем авторы выражают искреннюю благодарность Ю. Л. Далецкому за полезные обсуждения и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Далецкий, Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними дифференциальные уравнения, УМН, т. 22, вып. 4(3), 1967

2. В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах, УМН, т. 22, вып. 6(201), 1967.

3. В. И. Авербух, О производных высших порядков в линейных топологических пространствах, Вестник Моск. ун-та, матем., мех., № 1, 1970.

Поступила 16.VI 1972., после переработки — 26.XI 1973 г.

Львовский политехнический институт