УДК 518.517.948.32

Приближенное решение задачи Газемана

Н. Я. Тихоненко

Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат. Тогда, согласно [1, 2], в случае $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 0$ по формулам

$$\Phi^-(t) = t^{-\varkappa}\left\{-\frac{1}{2}\rho(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(\tau)}{\tau - t}d\tau + p_{\varkappa-1}(t)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right\}, \qquad (1)$$

$$\Phi^+(t) = \left\{\frac{1}{2}\rho[\beta(t)] + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(\tau)}{\tau - t}d\tau\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\varphi[\beta(t)] + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right\} \qquad (2)$$

находится исчезающее на бесконечности решение задачи Газемана

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in L. \qquad (3)$$

Здесь $\alpha(t)$ — сдвиг, переводящий контур L самого в себя с сохранением направления обхода, такой, что $\alpha'(t) \neq 0$ для всех $t \in L$, $\beta(t)$ — сдвиг, обратный $\alpha(t)$, т. е. $\beta[\alpha(t)] \equiv t$; $p_{\varkappa-1}(t)$ — произвольный многочлен степени $\varkappa - 1$; функции $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t)$ принадлежат классу H_λ, функция $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$K\varphi \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau = \ln[t^{-\varkappa}G(t)], \qquad (4)$$

а функция $\rho(t)$ — решение уравнения (4) с правой частью

$$\psi(t) = g(t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Тогда ядро уравнения (4) в точке $\tau = t$ имеет особенность порядка $1 - \lambda$ и представимо в виде

$$\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} = \frac{K(t, \tau)}{|\tau - t|^{1-\lambda}},$$

где функция $K(t, \tau)$ принадлежит классу H_β по обеим переменным. Решение уравнения (4) ищем в классе H_α, $\alpha \leqslant \min\{\lambda, 1 - \lambda, \beta\}$. Пространство H_α можно сделать банаховым (см., например, [1]), если ввести в нем норму

$$\|\varphi(t)\| = \max_{t \in L}|\varphi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2}\frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha}. \qquad (6)$$

Построение приближенного решения задачи (3) сводится к нахождению приближенных решений уравнения (4) с правыми частями $\ln[t^{-\varkappa}G(t)]$ и (5).

Приближенные решения $\widetilde{\varphi}(t)$ и $\widetilde{\rho}(t)$ уравнения (4) ищем в виде обобщенных многочленов

$$\widetilde{\varphi}(t)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k;\qquad \widetilde{\rho}(t)=\sum_{k=-n}^{n}\beta_k t^k. \tag{7}$$

Рассмотрим сначала метод коллокации. Пусть P — оператор проектирования пространства H_α на пространство X интерполяционных многочленов

$$u_n(\varphi;t)=\sum_{k=-n}^{k}a_k t^k;\quad a_k=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}\varphi(t_j)\,t_j^{-k};\quad u_n(\varphi;t_j)=\varphi(t_j) \tag{8}$$

по узлам

$$t_j=\exp\left\{\frac{2\pi i}{2n+1}j\right\},\qquad j=0,1,2,\ldots,2n. \tag{9}$$

Подставляем (7) в (4) и строим интерполяционные многочлены по узлам (9) для полученного выражения и уравнения (4). Из условия совпадения этих многочленов получаем систему алгебраических уравнений для определения α_k

$$\widetilde{K\varphi}\equiv\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\left\{t_j^k+\frac{1}{2\pi i}{\sum_{s=0}^{2n}}'\left[\frac{1}{t_s-t_j}-\frac{\alpha'(t_s)}{\alpha(t_s)-\alpha(t_j)}\right]t_s^k\Delta t_s\right\}=\ln\left[t_j^{-\varkappa}G(t_j)\right],$$

$$j=0,1,2,\ldots,2n, \tag{10}$$

где Σ' означает суммирование по $s\neq j$, а $\Delta t_s=t_{s+1}-t_s$; $t_{2n+1}=t_0$, $\Delta t_{2n}=t_0-t_{2n}$.

Из общей теории приближенных методов [3, 4] и из теории интерполирования [5] и оценок работы [6] имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. *Если оператор K имеет линейный обратный, то при n таких, что*

$$\frac{a+b\ln(2n+1)}{(2n+1)^\alpha}<1, \tag{11}$$

система (10) *разрешима, и справедлива оценка погрешности приближенного решения уравнения* (4)

$$\|\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(t)\|\leqslant\frac{a_1+b_1\ln(2n+1)}{(2n+1)^\alpha}\|\widetilde{\varphi}(t)\|. \tag{12}$$

Здесь a, b, a_1, b_1 — вполне определенные постоянные, не зависящие от n.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\|PK\widetilde{\varphi}(t)-\widetilde{K\varphi}(t)\|\leqslant\varepsilon_n\|\widetilde{\varphi}(t)\|,\quad\text{где}\quad\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

Имеем, в силу [6, 7],

$$\|PK\widetilde{\varphi}-\widetilde{K\varphi}\|\leqslant\frac{1}{\pi^2}\left[2+\ln\frac{2}{\pi}(2n+1)\right]\max_j\left|\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{k(t_j,\tau)}{|\tau-t_j|^{1-\lambda}}\widetilde{\varphi}(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$+{\sum_{s=0}^{2n}}'\int_{t_s}^{t_{s+1}}\frac{\widetilde{\varphi}(t_s)}{|\tau-t_j|^{1-\lambda}}\left[k(t_j,\tau)-k(t_j,t_s)\right]d\tau+$$

$$+\sum_{s=0}^{2n}{}' k(t_j, t_s)\widetilde{\varphi}(t_s)\int_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\frac{1}{|\tau-t_j|^{1-\lambda}}-\frac{1}{|t_s-t_j|^{1-\lambda}}\right]d\tau+$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{2n}{}'\int_{t_s}^{t_{s+1}}\frac{k(t_j,\tau)}{|\tau-t_j|^{1-\lambda}}[\widetilde{\varphi}(\tau)-\widetilde{\varphi}(t_s)]\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi^2}\left[2+\ln\frac{2}{\pi}(2n+1)\right](|J_1|+|J_2|+|J_3|+|J_4|).$$

Легко видеть, что

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{\lambda}\max_{\tau}|k(t_j,\tau)|\,\|\widetilde{\varphi}(t)\|;$$

$$|J_3|\leqslant\frac{c_1}{2-\lambda}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{1-\lambda}\max_{\tau}|k(t_j,\tau)|\,\|\widetilde{\varphi}(t)\|,$$

где c_1 — постоянная Гельдера функции $|\tau-t_j|^{\lambda-1}$;

$$|J_2|\leqslant\frac{c_2}{1+\beta}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{\beta}\max_{t\in[t_{j-1};t_{j+1}]}|\tau-t_j|^{\lambda-1}\,\|\widetilde{\varphi}(t)\|,$$

где c_2 — постоянная Гельдера функции $k(t,\tau)$;

$$|J_4|\leqslant\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{2\pi}{2\pi+1}\right)^{\alpha}\max_{t\in[t_{j-1};t_{j+1}]}|k(t_j,\tau)\|\,\tau-t_j|^{\lambda-1}\,\|\widetilde{\varphi}(t)\|.$$

Из этих оценок легко получить (11) и (12). Для нахождения решения задачи (3) нужно еще решить уравнение (4) с правой частью (5), мы же получаем следующую правую часть:

$$\widetilde{\psi}(t)=g(t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\widetilde{\varphi}(\tau)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau\right\}. \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$\|\psi(t)-\widetilde{\psi}(t)\|\leqslant\frac{a_2+b_2\ln(2n+1)}{(2n+1)^{\alpha}}\|\widetilde{\varphi}(t)\|.$$

Система (10) с правой частью, которая соответствует (13), разрешима, и можно просто получить оценки вида (11) и (12). Тогда приближенное решение $\widetilde{\Phi}^-(t)$, $\widetilde{\Phi}^+(t)$ задачи (3) получается подстановкой $\widetilde{\varphi}(t)$ и $\rho(t)$ в (1) и (2), при этом справедлива оценка погрешности

$$\|\Phi^{\pm}(t)-\widetilde{\Phi}^{\pm}(t)\|\leqslant\frac{A+B\ln(2n+1)}{(2n+1)^{\alpha}}\|\widetilde{\Phi}^{\pm}(t)\|,$$

где A, B — постоянные, не зависящие от n.

Метод механических квадратур состоит в замене интеграла в (4) интегральной суммой по узлам

$$t_r=\exp\left\{\frac{2\pi i}{2n+1}\left(r+\frac{1}{2}\right)\right\},\qquad r=0,1,2,\ldots,2n,$$

и для определения постоянных α_k получаем систему уравнений

$$\sum_{k=-n}^{n} a_{jk}\alpha_k = \ln [t_j^{-\varkappa} G(t_j)], \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, 2n, \tag{14}$$

где

$$a_{jk} = t_j^k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=0}^{2n}\left[\frac{1}{t_r - t_j} - \frac{\alpha'(t_r)}{\alpha(t_r) - \alpha(t_j)}\right] t_r^k \Delta t_r.$$

Разрешимость системы (14) и оценка погрешности приближенного решения устанавливается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. ГИФМЛ, М., 1968.
2. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, ГИФМЛ, М., 1963.
3. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
4. Б. Г. Габдулхаев, Некоторые вопросы теории приближенных методов, I, Изв. вузов, Математика, № 9, 1968.
5. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
6. В. В. Иванов, Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, « Наукова думка», К., 1968.
7. И. В. Бойков, О приближенном решении некоторых типов интегральных уравнений с особенностями, Сб. аспирантских работ Казанского университета, Математика, вып. 1, 1970.

Поступила 19.I 1973 г.

Одесский государственный университет