УДК 517.946

Об оценках решений однородных линейных уравнений эллиптического типа, заданных на ограниченных областях

А. С. Фохт

Введение. Для решений $u(x)$ однородных линейных уравнений эллиптического типа любого порядка $2l$ с переменными коэффициентами, заданных на ограниченной области $G \subset R_n$ с достаточно гладкой границей Γ, в работах [1, 2] была получена такая оценка:

$$\int\limits_G |D^s u|^2 t^{2s}\, dx \leqslant C_s \int\limits_G u^2\, dx, \tag{1}$$

где $t = t(x)$ —расстояние от точки интегрирования $x \in G$ до границы Γ области G; $s \geqslant 1$ — любое целое число, $C_s > 0$, const, $D^s u = \sum\limits_{\nu} \left| \dfrac{\partial^s u}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}} \right|$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j = s$, а также более общая оценка [3, 4]

$$\int\limits_G |D^s u|^p t^{sp}\, dx \leqslant C_{s,p} \int\limits_G |u|^p\, dx \tag{2}$$

в случае, если порядок уравнения — второй ($1 < p < \infty$). Далее, был получен более сильный результат в том смысле, что на гладкость границы Γ налагались менее сильные требования. А именно, были получены оценки, аналогичные оценкам (1) и (2), в случае, если граница Γ ограниченной области $G \subset R_n$ имеет ограниченную вариацию [5]. Как следует из приема, рассмотренного в работе [5], вопрос сводится к тому, чтобы на области G построить вспомогательную много раз (или бесконечно) дифференцируемую функцию, эквивалентную расстоянию от точки $x \in G$ до границы области. И при этом выдвигать в отношении границы минимальные требования. Этот же путь избрал также О. В. Бесов, которому (до выхода в свет работы [5] и с иными, нежели у нас, целями) удалось построить функцию, эквивалентную расстоянию рассматриваемой точки до границы ограниченной области $G \subset R_n$ с границей Γ, удовлетворяющей условию Липшица [6]. Это более слабый, чем полученный в работе [5] результат.

Оценки типа (1), (2) не затрагивают граничных значений решения $u(x)$, а потому естественно было ожидать, что при их получении не следует исходить из каких-то свойств границы и что требования в прежних работах исходили просто из несовершенства метода и были не по существу.

Данная работа имеет целью устранить указанный недостаток. А именно, в ней на произвольной ограниченной области $G \subset R_n$ будет построена функция, эквивалентная расстоянию, бесконечно дифференцируемая и удовлетворяющая необходимым оценкам. И тем самым (как следует из всех ранее перечисленных работ [1—5]), будут доказаны оценки (1), (2) для произвольной ограниченной области $G \subset R_n$.

1. В «теории распределений» Л. Шварца [7], а затем в книге Г. Бремермана [8] используется процесс регуляризации: по заданной (на компактном множестве) непрерывной функции строится иная функция, в определенном смысле близкая к исходной, но уже бесконечно дифференцируемая (из класса C^∞). В дальнейшем будем пользоваться этим приемом.

Построим вспомогательную функцию. Пусть

$$\mu_{r,s}(y) = \begin{cases} k_{r,s} \dfrac{r^{2s}}{(r^2 - \|y\|^2)^s} e^{-\frac{r^2}{r^2 - \|y\|^2}}, & \text{если } \|y\| \leqslant r, \\ 0 & \text{при } \|y\| > r, \end{cases} \tag{3}$$

где $s \geqslant 0$, $k_{r,s} > 0$ и определяется из условия нормировки:

$$\int\limits_{\|y\| \leqslant r} \mu_{r,s}(y)\, dy = 1, \tag{4}$$

откуда

$$k_{r,s} = \frac{1}{r^n} \left[\int\limits_{\|z\| \leqslant 1} \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^s} e^{-\frac{1}{1 - \|z\|^2}} dz \right]^{-1}. \tag{5}$$

Здесь $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$; $dy = dy_1 dy_2 \ldots dy_n$; аналогично для z.

Функция $\mu_{r,s}(y)$ имеет на E^n непрерывные производные любого порядка, причем все они обращаются в нуль на сфере $\{y : \|y\| = r\}$ и вне ее. Потому $\mu_{r,s}(y) \in C^\infty(E^n)$.

З а м е ч а н и е 1. Если рассмотреть два произвольных числа $s, s' \geqslant 0$ $(s' \neq s)$, то отношение

$$\frac{k_{r,s}}{k_{r,s'}} = C_{s,s'} > 0, \tag{6}$$

где $C_{s,s'}$ не зависит от r, что следует из простых вычислений.

Л е м м а 1. *В n-мерном евклидовом пространстве E^n компактность множества равносильна его ограниченности.*

Доказательство смотри в работе [9, стр. 100—105].

Л е м м а 2. *Пусть* $f(y)$ — *локально интегрируемая в* E^n *функция. Тогда свертка*

$$\varphi_{r,s}(x) = (f * \mu_{r,s})(x) = \int\limits_{E^n} f(y)\,\mu_{r,s}(x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, \ldots, y_n)\,\mu_{r,s}(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\,dy_1 \ldots dy_n \in C^\infty(E^n). \qquad (7)$$

Эта операция носит название «регуляризации» функции $f(y)$.

З а м е ч а н и е 2. Носитель функции $(f * \mu_{r,s})$ содержится во множестве $\{y : y_0 \in K,\ \|y - y_0\| \leqslant r\}$, где K — носитель функции $f(y_0)$.

Л е м м а 3. *Пусть* $f(y)$ *непрерывна на* E^n. *Тогда при* $r \to 0$ *регуляризованная функция* $(f * \mu_{r,s})(x)$ *стремится к функции* $f(x)$ *равномерно на любом компактном множестве пространства* E^n.

Л е м м а 4. *Пусть функция* $f(y)$ — *локально интегрируемая на* E^n, $\psi \in (D)$ (D — *класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем*). *Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{E^n} (f * \mu_{r,s})(y)\,\psi(y)\,dy = \int\limits_{E^n} f(y)\,\psi(y)\,dy \qquad (8)$$

(*где интеграл понимается в смысле Лебега*).

Леммы 2—4 доказываются аналогично случаю, когда $s = 0$ и который доказан в работе [8].

Пусть задана произвольная ограниченная область $G \subset R_n$ и пусть $\rho(x, \Gamma)$ означает расстояние от произвольной точки $x \in G$ до границы Γ области G:

$$\rho(x, \Gamma) = \inf_{M \in \Gamma} \rho(x, M). \qquad (9)$$

Л е м м а 5. *Функция* $\rho(x, \Gamma)$ *непрерывна на области* G *с границей* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что указанная нижняя грань (9) осуществляется только на точках из множества Γ. Допустим противное. Пусть

$$\rho(x, M_0) = \inf_{M \in \Gamma} \rho(x, M) \quad (M_0 \in G).$$

Если $M_0 \in G$, то по определению внутренней точки из области существует такое фиксированное достаточно малое $\varepsilon > 0$, что шар радиуса ε с центром в точке M_0 целиком входит в область G, и, кроме того, шар радиуса $\rho(x, M_0) + \varepsilon$ с центром в точке x также входит в область G. (В противном случае нижняя грань осуществлялась бы не точкой M_0, а какой-то другой точкой, но уже принадлежащей множеству Γ). Но по определению нижней грани для любого $\sigma > 0$ найдется такая точка M_σ из множества Γ, что будет иметь место неравенство: $\rho(x, M_0) + \sigma > \rho(x, M_\sigma)$ $(M_\sigma \in \Gamma)$. Примем $\sigma = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда выходит, что внутри шара радиуса $\rho(x, M_0) + \varepsilon$ с центром в точке x нашлась точка границы M_σ, что противоречит предыдущему.

Итак, $M_0 \bar{\in} G$. Рассмотрим теперь какую-нибудь точку $x \in G$. Пусть $\rho(x, \Gamma) = \inf\limits_{M \in \Gamma} \rho(x, M)$ осуществляется некоторой точкой $M_1 \in \Gamma$, т. е. $\rho(x, \Gamma) = \rho(x, M_1)$.

Дадим величине x малое приращение $\overline{\Delta x}$, так что точка $x + \overline{\Delta x} \in G$, и рассмотрим треугольник с вершинами в точках $x = Q$, $x + \overline{\Delta x} = P$ и M_1.

Из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(P, M_1) < \rho(Q, M_1) + \rho(P, Q)$$

или

$$\rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma) = \inf_{M\in\Gamma} \rho(x+\overline{\Delta x}, M) \leqslant \rho(x+\Delta x, M_1) < \rho(x, \Gamma) + |\overline{\Delta x}|. \quad (10)$$

Случай А. Допустим, что $\rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma) \geqslant \rho(x, \Gamma)$. Тогда из неравенства (10) получим:

$$0 \leqslant \rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma) - \rho(x, \Gamma) < |\overline{\Delta x}|. \quad (11)$$

Случай Б. Пусть теперь $\rho(x, \Gamma) \geqslant \rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma)$. Тогда рассмотрим треугольник M_2PQ, где M_2 — та точка из множества Γ, на которой осуществляется $\inf\limits_{M\in\Gamma} \rho(x+\overline{\Delta x}, M)$. Проводя рассуждение, аналогичное предыдущему (из случая А), получим

$$0 < \rho(x, \Gamma) - \rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma) < |\overline{\Delta x}| \quad (12)$$

или

$$0 > \rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma) - \rho(x, \Gamma) > -|\overline{\Delta x}|. \quad (13)$$

Из соотношений (11) и (13) следует, что

$$|\rho(x+\overline{\Delta x}, \Gamma) - \rho(x, \Gamma)| < |\overline{\Delta x}|,$$

откуда получается, что функция $\rho(x, \Gamma)$ непрерывна на области G. Если $x\in\Gamma$, то непрерывность функции $\rho(x, \Gamma)$ очевидна, так как в этом случае по определению $\rho(x, \Gamma) = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{r,s}(x) = (\rho * \mu_{r,s})(x) \quad (\rho = \rho(x, \Gamma)), \quad (14)$$

где $x\in G$, а функция $\mu_{r,s}(x)$ определена формулой (3).

Лемма 6. *Функция*

$$\lambda_{r,\alpha}(x) = \varphi^{\alpha}_{r,s}(x) \in C^{\infty}(G) \quad (15)$$

и удовлетворяет таким неравенствам (*при достаточно малом* $r > 0$):

$$C_1\rho^{\alpha}(x, \Gamma) < \lambda_{r,\alpha}(x) < C_2\rho^{\alpha}(x, \Gamma), \quad (16)$$

$$|D^k_{\nu}\lambda_{r,\alpha}(x)| \leqslant C_3\rho^{\alpha-k}(x, \Gamma), \quad (17)$$

где $C_1, C_2, C_3 > 0$ — *константы, не зависящие от* $x, \alpha \geqslant k \geqslant 1$, k — *целое число*, $D^k_{\nu}\lambda_{r,\alpha}(x) = \dfrac{\partial^k\lambda_{r,\alpha}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j = k$.

Доказательство. Функция $\varphi_{r,s}(x)\in C^{\infty}(g)$ в силу леммы 2, а потому и функция $\lambda_{r,\alpha}(x)\in C^{\infty}(g)$.

В силу леммы 3 функция $\varphi_{r,s}(x)$ стремится к $\rho(x, \Gamma)$ равномерно при $r\to 0$. Поэтому для любой пары чисел $C_1' < 1$ и $C_2' > 1$ найдется такое $r_0 > 0$, что для всех r, $0 < r < r_0$, будет иметь место неравенство $C_1'\rho(x,\Gamma) < \varphi_{r,s}(x) < C_2'\rho(x, \Gamma)$, из которого следует соотношение (16). Докажем неравенство (17). С этой целью рассмотрим

$$\frac{1}{k_{r,s}} D^k_{\nu,x}\mu_{r,s}(x) = D^k_{\nu,x}\frac{r^{2s}}{(r^2-x^2)^s} e^{-\frac{r^2}{r^2-x^2}} = (x = ry) =$$

$$= \frac{1}{r^k} D^k_{\nu,y}\frac{1}{(1-y^2)^s} e^{-\frac{1}{1-y^2}},$$

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2; \quad y^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,$$

где

$$D^k_{\nu \cdot x} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\nu_1}, \ldots, \partial x_n^{\nu_n}}, \sum_{j=1}^{n} \nu_j = k,$$

$$D^k_{\nu \cdot y} = \frac{\partial^k}{\partial y_1^{\nu_1} \ldots \partial y_n^{\nu_n}}, \sum_{j=1}^{n} \nu_j = k, \quad y_i r = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда

$$|D^k_{\nu \cdot x} \varphi_{r,s}(x)| = \left| D^k_{\nu \cdot x} \int_{E^n} \rho(z, \Gamma) \mu_{r,s}(z - x)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E^n} \rho(z, \Gamma) |D^k_{\nu \cdot x} \mu_{r,s}(z - x)|\, dz \leqslant \max_{z \in \overline{G}} \rho(z, \Gamma) \int_{E^n} |D^k_{\nu \cdot x} \mu_{r,s}(z - x)|\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \max_{z \in \overline{G}} \rho(z, \Gamma) \frac{1}{r^k} \int_{\|z'\| \leqslant 1} |D^k_{\nu \cdot y} \mu_{r,s}(z' - y)|\, dz' \leqslant$$

$$\leqslant (\text{в силу нормировки функции } \mu_{r,s}(x)) \leqslant \frac{C}{r^k} = C_k \left(z' = \frac{z}{r} \right).$$

Поэтому

$$|D^k_{\nu \cdot x} \varphi^{\alpha}_{r,s}(x)| \leqslant C'_r \varphi^{\alpha - k}_{r,s}(x) \leqslant C''_r \rho^{\alpha - k}(x, \Gamma),$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Фохт, Некоторые неравенства для решений уравнений эллиптического типа и их производные вблизи границы области в метрике L_2, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 77, 1965.
2. А. С. Фохт, Некоторые теоремы вложения для решений уравнений эллиптического типа, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 105, 1969.
3. А. С. Фохт, Интегральные оценки обобщенных производных решений уравнений эллиптического типа второго порядка в метрике L_p, $p > 2$, и некоторые теоремы вложения, связанные с ними, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 117, 1972.
4. А. С. Фохт, Оценки обобщенных производных решений уравнений эллиптического типа второго порядка в метрике L_p, $1 < p < 2$, и некоторые теоремы вложения, связанные с ними, Дифференц. уравнения, (в печати).
5. А. С. Фохт, Интегральные оценки производных решений однородных уравнений эллиптического типа с пониженными требованиями на класс гладкости границы области, УМЖ, т. 24, № 6, 1972.
6. О. Б. Бесов, Поведение дифференцируемых функций на негладких поверхностях, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 117, 1972.
7. L. Schwartz, Theorie des distributions, Hermann. Paris, vol. I, 1950; vol. II, 1951 (1957—1959).
8. Г. Бремерман, Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, «Мир», М., 1968.
9. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Изд. 4, «Наука», М., 1968.

Поступила 7.II 1973 г.

Московский физико-технический институт