УДК 517.917

О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной

Ю. Д. Шлапак

1. Будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right), \tag{1}$$

правая часть которого определена в области

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant \frac{dx}{dt} = y \leqslant d, \quad e \leqslant \frac{d^2x}{dt^2} = y_1 \leqslant f, \quad -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

периодична по t с периодом T, непрерывна по совокупности переменных t, x, y, y_1 и удовлетворяет неравенствам:

$$|f(t, x, y, y_1)| \leqslant M, \qquad |f(t, x, y, y_1) - f(t, x', y', y_1')| \leqslant K_1|x - x'| + \\ + K_2|y - y'| + K_3|y_1 - y_1'|, \tag{3}$$

где M, K_1, K_2, K_3 — некоторые постоянные.

Будем предполагать, что постоянные $a, b, c, d, e, f, M, K_1, K_2$ и K_3 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$b - a \geqslant \frac{MT^2}{2}, \; c \leqslant -\frac{5MT}{6} \leqslant \frac{5MT}{6} \leqslant d, \; e \leqslant -2M \leqslant 2M \leqslant f, \tag{А}$$

$$\frac{T^2}{4}K_1 + \frac{T^2}{4}K_2 + 2K_3 < 1. \tag{Б}$$

Процедура приведения уравнения (1) к нормальному виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{4}$$

для которого вопрос существования и построения периодических решений рассмотрен в [1—3], сопряжена с целым рядом принципиальных трудностей и, как следует из приводимого ниже алгоритма отыскания периодических решений, является излишней при решении задачи о периодических решениях.

Алгоритм отыскания периодических решений (1) связан со следующей схемой.

В качестве нулевого приближения периодического решения берется некоторая точка $x = x_0$ области $a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x \leqslant b - \frac{MT^2}{4}$, а все последующие приближения определяются формулой

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + L^2 f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0), \ddot{x}_m(t, x_0)), \tag{I}$$

где L^2 — оператор вида

$$L^2 f(t) = \int_0^t \left\{\int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\, dt - \overline{\int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\, dt}\right\} dt, \tag{5}$$

а $\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$.

Сходимость этого алгоритма обеспечивается следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1) *функция* $f(t, x, y, y_1)$ *определена в области* (2), T-*периодична по* t, *непрерывна по совокупности переменных* t, x, y, y_1, *удовлетворяет неравенствам* (3), (А) *и* (Б). *Тогда последовательность периодических по* t *периода* T *функций*

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + L^2 f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0), \ddot{x}_m(t, x_0))$$

сходится при $m \to \infty$ *равномерно относительно*

$$t \in (-\infty, \infty),\ a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x_0 \leqslant b - \frac{MT^2}{4}, \tag{II}$$

а предельная функция $x_\infty(t, x_0)$ *определена в области* (II), *периодична и является единственным решением уравнения*

$$x(t, x_0) = x_0 + L^2 f(t, x(t, x_0),\ \dot{x}(t, x_0),\ \ddot{x}(t, x_0)). \tag{III}$$

При этом имеет место оценка

$$\operatorname{colon}(|x_\infty - x_m|,\ |\dot{x}_\infty - \dot{x}_m|,\ |\ddot{x}_\infty - \ddot{x}_m|) \leqslant Q_0^m (E - Q_0)^{-1} z_1^0, \tag{6}$$

где $z_1^0 = \operatorname{colon}(|x_1 - x_0|_0,\ |\dot{x}_1|_0,\ |\ddot{x}_1|_0)$, $|\cdot|_0 = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T}|\cdot|$;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{4}K_1, & \frac{T^2}{4}K_2, & \frac{T^2}{4}K_3 \\ \frac{5T}{6}K_1, & \frac{5T}{6}K_2, & \frac{5T}{6}K_3 \\ 2K_1, & 2K_2, & 2K_3 \end{pmatrix}, \qquad z_1^0 \leqslant \begin{pmatrix} \frac{MT^2}{4} \\ \frac{5MT}{6} \\ 2M \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Зависимость между периодическим решением уравнения (1) и предельной функцией последовательности (I) устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Если уравнение* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и имеет периодическое периода* T *решение* $x = \varphi(t)$, *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $\varphi(0) = x_0$ *отрезка*

$$a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x_0 \leqslant b - \frac{MT^2}{4}, \tag{8}$$

то

$$\varphi(t) = x_\infty(t, x_0). \tag{IV}$$

2. При использовании указанной выше схемы отыскания периодических решений надо знать начальную точку x_0, y_0, через которую проходит периодическое решение. Вопрос отыскания такой точки тесно связан с решением следующей задачи: для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2}\right) - u \tag{9}$$

выбрать параметр (управление) u, а также начальную скорость $\dot{x}(0) = y_0$ так, чтобы движение $x(t, x_0, y_0, u)$, проходящее при $t = 0$ через точку $x(0, x_0, y_0, u) = x_0$, $\dot{x}(0, x_0, y_0, u) = y_0$, было периодическим с периодом T.

Из теоремы 1 следует, что решение поставленной задачи существует и единственно, лишь только $a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x_0 \leqslant b - \frac{MT^2}{4}$.

Действительно, взяв

$$u = \Delta(x_0) = \overline{f(t, x_\infty(t, x_0), \dot{x}_\infty(t, x_0), \ddot{x}_\infty(t, x_0))},$$

видим, что решение $x(t, x_0, \Delta(x_0))$ совпадает с $x_\infty(t, x_0)$, а начальная скорость $y_0 = \dot{x}(0, x_0, \Delta(x_0))$ совпадает с

$$y_0 = y(x_0) = -\overline{\int_0^t [f(t, x_\infty(t, x_0), \dot{x}_\infty(t, x_0) \ddot{x}_\infty(t, x_0)) - \Delta(x_0)]\, dt}.$$

Поскольку при $u = 0$ уравнение (9) переходит в (1), то вопрос существования периодических решений уравнения (1) решается вопросом существования нулей функции $\Delta(x_0)$. Количество периодических решений уравнения (1) определяется количеством нулей функции $\Delta(x_0)$. Сказанное приводит к утверждению.

Теорема 3. *Если правая часть уравнения* (1) *является полиномом относительно* x, $y = \frac{dx}{dt}$, $y_1 = \frac{d^2x}{dt^2}$ *и удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то уравнение* (1) *имеет по одному периодическому решению периода* T *либо для каждого значения* $x(0) = x_0$ *отрезка* (8), *либо для конечного числа таких значений.*

Для решения вопроса о нулях функции $\Delta(x_0)$ рассмотрим ее приближения, а именно функции

$$\Delta_m(x_0) = \overline{f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0), \ddot{x}_m(t, x_0))} \qquad (m = 0, 1, \ldots), \tag{10}$$

где $x_m(t, x_0)$ — функции последовательности (I).

Имеет место оценка

$$|\Delta_m(x_0) - \Delta(x_0)| \leqslant kQ_0^m (E - Q_0)^{-1} z_1^0 = d_m, \tag{11}$$

где k — вектор-строка (K_1, K_2, K_3).

Учитывая непрерывность функций $\Delta_m(x_0)$ по x_0 и оценку (11), легко доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть правая часть уравнения* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Предположим, что для некоторого* m *функция* (10) *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x \leqslant b - \frac{MT^2}{4}} \Delta_m(x) \leqslant -d_m, \qquad \max_{a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x \leqslant b - \frac{MT^2}{4}} \Delta_m(x) \geqslant d_m, \tag{12}$$

где d_m — *постоянная* (11).

Тогда уравнение (1) *имеет периодическое периода* T *решение* $x(t)$, *для которого*

$$a \leqslant x(t) \leqslant b,\ c \leqslant \dot{x}(t) \leqslant d,\ e \leqslant \ddot{x} \leqslant f, \quad a + \frac{MT^2}{4} \leqslant x(0) \leqslant b - \frac{MT^2}{4}.$$

Согласно (11) для всякого нуля x^0 функции $\Delta(x)$ имеем

$$|\Delta_m(x^0)| \leqslant d_m \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Поэтому любую точку отрезка (8), удовлетворяющую (13), можно принять за m-е приближение к начальному значению периодического решения.

Приведенную схему отыскания периодических решений проиллюстрируем на следующем примере. Пусть уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos \pi t \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^5 + 0{,}05 \sin x + \gamma \sin \pi t$$

рассматривается в области $-\infty < t < \infty$, $|x| \leqslant a$, $|y_1| = \left| \frac{d^2x}{dt^2} \right| \leqslant b$. Накладывая на постоянные a, b и параметр γ условия, при которых выполняются условия (А), (Б) и условия (12) при $m=0$, получаем, что когда $a \geqslant 1$, $0{,}12 \leqslant b \leqslant 0{,}2$, а параметр γ изменяется в меньшем из двух интервалов, зависящих от выбора b:

$$|\gamma| \leqslant \frac{b}{2} - b^5 - 0{,}05, \quad |\gamma| \leqslant \frac{0{,}045 - b^4 - 0{,}05b^5 - 10b^9}{10b^4 + 0{,}05},$$

уравнение имеет 2-периодическое решение.

Беря $x_0 = 0$ в качестве приближенного значения начальной точки периодического решения, получаем:

$$x_1(t, 0) = -\frac{\gamma}{\pi^2} \sin \pi t,$$

$$x_2(t, 0) \approx \frac{\gamma}{\pi^2}\left(\frac{0{,}05}{\pi^2} - 1 \right) \sin \pi t + \gamma^5 \left[-\frac{5}{128\pi^2} \sin 2\pi t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{128\pi^2} \sin 4\pi t - \frac{1}{1152\pi^2} \sin 6\pi t \right]$$

и т. д.

3. Применим изложенную выше теорию для исследования периодических движений спутника относительно центра масс, происходящих в плоскости его орбиты около направления радиуса-вектора и описываемых уравнением [4]

$$(1 + e \cos t) \frac{d^2x}{dt^2} - 2e \sin t \frac{dx}{dt} + \alpha \sin x = 4e \sin t, \tag{14}$$

где x— удвоенный угол между одной из главных осей эллипсоида инерции спутника, лежащей в плоскости орбиты, и радиусом-вектором орбиты; t — истинная аномалия; α и e — некоторые параметры, причем $|\alpha| \leqslant 3$, $0 < e < 1$.

Перепишем уравнение (14) в виде (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4e \sin t - \alpha \sin x + 2e \sin t \frac{dx}{dt} - e \cos t \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{15}$$

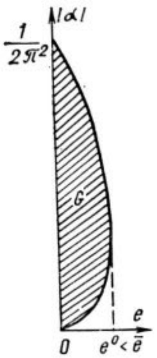
Пусть правая часть уравнения (15) определена в области

$$|x| \leqslant P, \quad |y| = \left| \frac{dx}{dt} \right| \leqslant N, \quad |y_1| = \left| \frac{d^2x}{dt^2} \right| \leqslant K, \quad -\infty < t < \infty. \tag{16}$$

Как видим, в области (16) правая часть уравнения (15) периодична по t с периодом $T = 2\pi$, непрерывна по совокупности переменных t, x, y, y_1 и удовлетворяет неравенствам (3).

Связывая величины P, N, K, α и e условиями (А) и (Б) и условиями (12), получаем, что при каждом фиксированном значении параметра $e = e_0$, удовлетворяющем неравенству $e \leqslant \dfrac{1}{2\pi\sqrt{2bA}+\pi^2 A+2b}$, и каждом фиксированном α, взятом в промежутке, соответствующем $e=e_0$: $\varphi_1(e) \leqslant |\alpha| \leqslant \varphi_2(e)$, уравнение (14) имеет по крайней мере одно периодическое решение периода 2π. При этом постоянные P, N и K также зависят от выбранного значения e_0 параметра e.

Функции $\varphi_1(e)$ и $\varphi_2(e)$ таковы, что $\varphi_1(e)$, $\varphi_2(e) \geqslant 0$, $\varphi_1(0)=0$,



$$\varphi_2(0)=\frac{1}{2\pi^2};\quad A=K+2N+4,\ b=\frac{6+10\pi}{3}.$$

Так как $A>4$, то для e можно дать оценку сверху: $e<e=0{,}008$.

На рисунке изображена область G, определяющая значения $|\alpha|$ и e, при которых уравнение (15) имеет периодическое решение.

Поскольку $\Delta_0(x_0)=-\alpha\sin x_0$, то возьмем в качестве приближения к начальному значению периодического решения $x_0=0$. Тогда

$$x_1(t,0)=-4e\sin t.$$

В выражении для $x_2(t,0)=L^2 f(t,x_1,\dot{x}_1,\ddot{x}_1)$ заменяем $\sin x_1$ на x_1. Получим

$$x_2(t,0)\approx x_2'(t,0)=-4e(1+\alpha)\sin t+\frac{3}{2}e^2\sin 2t,$$

при этом $|x_2(t,0)-x_2'(t,0)|<0{,}000005$.

П р и м е ч а н и е. Если представить уравнение (14) в виде (4) и строить приближения согласно схеме, разработанной в [1], то уже на первом шаге появляются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции.

Автор благодарит А. М. Самойленко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. С а м о й л е н к о, О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, Дифференц. уравнения, т. 3, № 11, 1967.
2. А. М. С а м о й л е н к о, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I, УМЖ, т. 17, № 4, 1965.
3. А. М. С а м о й л е н к о, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.
4. А. П. Т о р ж е в с к и й, Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите, Космические исследования, т. 2, вып. 5, 1964.
5. Н. Н. Б о г о л ю б о в, Ю. А. М и т р о п о л ь с к и й. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Изд. 3-е, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 17.V 1973 г.
Киевский государственный университет