К. Г. Валеев, О. А. Жаутыков. Бесконечные системы дифференциальных уравнений

(«Наука» КазССР, Алма-Ата, 1974, 415 стр.)

Монография посвящена новому разделу современной теории дифференциальных уравнений — теории бесконечных систем дифференциальных уравнений. Развитие этой теории относится к последним нескольким десятилетиям; ее простейшим объектом являются счетные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обобщением которых служат системы уравнений в общих функциональных пространствах. Изучение счетных систем значительно стимулировалось появлением работы А. Н. Тихонова [1], в которой доказана фундаментальная теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Систематическая теория счетных систем была развита К. П. Персидским, его последователями и учениками; основы теории конечных и бесконечных систем дифференциальных уравнений в функциональных пространствах заложены в работе М. А. Красносельского и. С. Г. Крейна [2] (отметим сразу же, что обзор литературы по данному вопросу не является целью предлагаемой рецензии; подробные литературные указания по работам отечественных и зарубежных ученых и вопросы, связанные с сопоставлением результатов различных авторов, достаточно детально обсуждаются в рецензируемой монографии, и поэтому ограничиваемся лишь минимумом литературных ссылок). Весомый вклад в развитие теории бесконечных систем внесли авторы монографии, и изложение их результатов составляет значительную часть содержания книги.

Основное содержание монографии разбито на 10 глав.

Первая глава — вводная. В ней приводятся некоторые сведения из функционального анализа, необходимые для дальнейшего (метрические пространства, теорема Арцела—Асколи, линейное нормированное пространство, линейные операторы и т. п.).

Вторая глава также посвящена вспомогательным вопросам (бесконечные системы алгебраических уравнений, теорема Вейерштрасса о разложении на множители голоморфной функции и ее приложения).

В третьей главе рассматриваются общие вопросы теории счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь приводится доказательство теоремы А. Н. Тихонова [1] о существовании и единственности решения задачи Коши и рассматриваются некоторые другие вопросы, примыкающие к этой теме. Кроме того, изучается продолжение решений и их зависимость от начальных данных и параметров.

В четвертой главе рассматриваются бесконечные гамильтоновы системы уравнений. Из рассмотренных здесь вопросов можно отметить обобщение скобок Пуассона на случай функций от счетного множества аргументов, распространение теории Гамильтона—Якоби на бесконечные канонические системы, а также канонические преобразования бесконечных гамильтоновых систем.

Глава 5 отведена важному частному классу бесконечных систем линейных уравнений. Здесь, следуя работам К. П. Персидского, авторы излагают общие свойства решений бесконечных однородной и неоднородной систем линейных уравнений, приводят некоторые сведения о применении преобразования Лапласа для систем с постоянными коэффициентами и обобщение теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению на бесконечномерный случай.

В главах 1—5 в основном содержатся ранее опубликованные результаты авторов и известные результаты других исследователей.

Начиная с главы 6, авторы приводят большое число принадлежащих им результатов, ранее не известных.

В главе 6 изучаются дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. Здесь рассмотрены элементы общей теории линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, уравнения с периодическими коэффициентами (обобщение теории Флоке, вопросы приводимости), а также исследовано поведение решений некоторых конкретных типов линейных и нелинейных систем уравнений на бесконечных интервалах.

Глава 7 посвящена аналитическим решениям бесконечных систем (распространение теорем Пуанкаре на бесчисленные системы, общие свойства аналитических функций счетного числа переменных, аналитичность решений по параметру, аналитические и периодические решения счетных систем интегро-дифференциальных уравнений).

В главе 8 рассматривается, применительно к дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве, принцип сведения Ляпунова (понижение порядка исследуемой системы при изучении устойчивости или при приближенном интегрировании). Здесь строится вспомогательное интегральное многообразие, изучается поведение решений на многообразиях, излагается схема сведения с помощью замен, рассматриваются вопросы сведения линейных систем и асимптотическое сведение нелинейных систем.

В девятой главе изучается принцип усреднения Крылова—Боголюбова для бесконечных систем дифференциальных уравнений.

Глава 10, завершающая монографию, посвящена дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве. Доказывается теорема существования и единственности, приводятся оценки решений, строится асимптотическое интегральное многообразие решений и изучаются некоторые асимптотические представления решений таких систем.

Приведенный здесь краткий обзор содержания книги свидетельствует о том, что в ней охвачены многие важные вопросы теории бесконечных систем дифференциальных уравнений. Имеется, однако, большое число интересных вопросов теории счетных систем и систем в общих функциональных пространствах, которые не вошли в книгу. Такое положение вполне естественно, так как теория бесконечных систем дифференциальных уравнений является новой областью математики, и систематизация всего имеющегося в ней материала в настоящее время просто невозможна. В рецензируемой книге авторы ограничились кругом вопросов, близких им по тематике собственных исследований и личной склонности. Читатель, заинтересованный в более широком охвате материала, должен обратиться к другим книгам и оригинальным статьям, многие из которых упомянуты в библиографии (196 названий), приведенной в данной монографии (в частности, по уравнениям в банаховом пространстве можно рекомендовать монографию М. Г. Крейна, Ю. Л. Далецкого [3]).

Бесконечные системы дифференциальных уравнений и дифференциальные уравнения в общих пространствах представляют большой интерес для математики. Их изучение далеко еще не завершено, и, поэтому, следует приветствовать появление книги, привлекающей внимание исследователей к этой интересной теме. В рецензируемой монографии, кроме изложения уже решенных вопросов, значительное внимание уделено нерешенным проблемам различной трудности, разработка которых может быть положена в основу дипломной работы или кандидатской диссертации (список такого рода проблем приводится в конце каждой из глав книги). Однако бесконечные системы интересны не только с теоретической точки зрения; как показано в монографии, имеется значительное число прикладных задач, решение которых связано с бесконечными системами. Некоторые из этих задач, а также конкретные расчетные примеры приведены в книге. Следует однако отметить, что конкретные физические и технические задачи, связанные с изучением систем с бесконечным числом степеней свободы, сравнительно редко изначально формулируются в терминах бесконечных систем. Как правило, для этой цели более естественным оказывается аппарат уравнений в частных производных или интегро-дифференциальных уравнений и т. п., и лишь последующая редукция приводит задачу к уравнениям в соответствующих функциональных пространствах или к счетной системе дифференциальных уравнений, которые далее могут оказаться весьма удобными для практического решения или теоретического исследования. В этой связи можно сказать, что прикладные аспекты теории бесконечных систем в настоящее время разработаны весьма неполно, и, соответственно, в рецензируемой монографии им уделено меньше внимания по сравнению с вопросами теории.

Книга может быть полезна и интересна для научных работников, специалистов, занимающихся теорией колебаний и вопросами устойчивости, вычислителей, чьи интересы связаны с приближенным решением дифференциальных уравнений, и, наконец, для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических специальностей. Для изучения книги достаточна математическая подготовка в объеме программ физико-математических факультетов университетов или педвузов и, даже, программ технических вузов с расширенным курсом высшей математики, поскольку целый ряд общих вопросов, выходящих за эти рамки, достаточно подробно поясняется в вводных главах книги.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, Über unendliche Systeme von Differentialgleichungen, Матем. сб., т. 41, вып. 4, 1934.
2. М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, Тр. семинара по функциональному анализу Воронежского гос. ун-та, вып. 2, 1956.
3. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», М., 1970.

Поступила 20.VI 1974 г.

В. М. Волосов