УДК 511.72

О метрической теории алгоритма М. В. Остроградского

К. Г. Валеев, Е. Д. Злебов

С помощью вероятностных методов исследуется первый алгоритм Остроградского. Даны оценки для ошибки n-го приближения. При суммировании рядов используется интегральное преобразование Лапласа.

1. Первый алгоритм Остроградского. Е. Я. Ремез [1] восстановил по рукописям М. В. Остроградского два алгоритма для представления действительных чисел α в виде знакочередующихся рядов с рациональными членами. Суть первого алгоритма в том, что по данному числу α_n, $0<\alpha_n<1$, находится целое положительное число p_n такое, что

$$1-p_n\alpha_n=\alpha_{n+1},\quad 0<\alpha_{n+1}<\alpha_n. \tag{1.1}$$

Пусть $\alpha=\alpha_1$, $0<\alpha<1$. Исключая числа $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$, имеем разложение:

$$\alpha=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_1p_2p_3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{p_1p_2\ldots p_n}+\ldots. \tag{1.2}$$

Последовательность чисел p_n — возрастающая. Е. Я. Ремез установил единственность разложения (1.2) [1]. Для почти всех чисел разложение (1.2) бесконечно. Дробь вида

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_1p_2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{p_1p_2\ldots p_n} \tag{1.3}$$

называем подходящей дробью порядка n числа α.
Из (1.3) легко выводятся следующие свойства:

$$P_n=p_nP_{n-1}+(-1)^{n+1},\quad Q_n=p_nQ_{n-1}, \tag{1.4}$$

$$\alpha_{n+1}=(-1)^n(\alpha Q_n-P_n). \tag{1.5}$$

Так как ряд (1.2) является знакочередующимся рядом Лейбница, то подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядка образуют убывающую последовательность $\frac{P_2}{Q_2}<\frac{P_4}{Q_4}<\ldots\leqslant\alpha\leqslant\ldots<\frac{P_3}{Q_3}<\frac{P_1}{Q_1}$. Знак равенства имеет место в случае рационального α, когда разложение (1.2) конечно и последняя подходящая дробь совпадает с α. Из теоремы Лейбница следует, что

$$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{Q_{n+1}}\leqslant\frac{1}{(n+1)!}. \tag{1.6}$$

Оценка (1.6) для приближения иррациональных чисел намного сильнее оценок для приближений, получаемых с помощью цепных дробей (см. [2, теоремы 9, 12]). Наихудшее приближение имеет число $1-e^{-1}$, так как для него $p_n=n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

2. Меры интервалов разбиения. Пусть $0<\alpha<1$. Обозначая через $[x]$ целую часть положительного числа x, получим из (1.1)

$$p_n=[\alpha_n^{-1}]\quad (n=1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

Рассматривая p_n как функции от α, получим, что $p_1=p_1(\alpha)$ имеет разрывы первого рода при $\alpha=k_1^{-1}$ $(k_1=2, 3, \ldots)$

$$p_1(\alpha)=k_1.\quad \frac{1}{k_1+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k_1}\quad (k_1=1, 2, \ldots). \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует. что $p_1(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0$. Везде дальше предполагаем, что величина α равномерно распределена на интервале $(0, 1)$. Для математического ожидания $M[p_1]$ получим:

$$M[p_1(\alpha)] = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \infty. \tag{2.3}$$

Аналогично доказываются соотношения:

$$M[p_n(\alpha)] = \infty \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{2.4}$$

Пусть закреплены значения $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(k_i = 1, 2, \ldots)$. Эти значения с помощью уравнений

$$p_1(\alpha) = k_1,\ p_2(\alpha) = k_1 + k_2, \ldots, p_n(\alpha) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

определяют некоторый интервал J_n. Произвольное число $\alpha \in J_n$ с помощью формулы (1.5) может быть записано в виде:

$$\alpha = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{(-1)^n \alpha_{n+1}}{Q_n}. \tag{2.5}$$

Так как α_{n+1} меняется в пределах от 0 до $(p_n+1)^{-1}$, то для меры EJ_n интервала J_n получим формулу:

$$EJ_n = \frac{1}{(p_n+1)Q_n} = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_n (p_n+1)}. \tag{2.6}$$

Суммируя всевозможные интервалы, приходим к формуле

$$\sum_{k_j=1}^{\infty} \frac{1}{k_1(k_1+k_2)\ldots(k_1+k_2+\ldots+k_n)(k_1+k_2+\ldots+k_n+1)} = 1, \tag{2.7}$$

которую докажем другим путем в следующем пункте.

3. Вывод формулы суммирования. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k e^{-kt} y(t) + \varphi(t),\ y(0) = 0,\ |\mu| < 1. \tag{3.1}$$

Введем изображения по Лапласу функций $y(t)$, $\varphi(t)$

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} y(t)\,dt, \qquad \psi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Для изображения $f(p)$ получим разностное уравнение:

$$f(p) = p^{-1}\psi(p) + \lambda p^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k f(p+k), \tag{3.3}$$

решение которого находим в виде ряда:

$$f(p) = \frac{\psi(p)}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{\infty} \frac{\mu^{k_1+\ldots+k_n} \psi(k_1+\ldots+k_n)}{k_1(k_1+k_2)\ldots(k_1+\ldots+k_n)}. \tag{3.4}$$

При $p \to 0$ найдем формулу:

$$\lim_{p \to 0} pf(p) = \psi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{\infty} \frac{\mu^{k_1+\ldots+k_n} \psi(k_1 + \ldots + k_n)}{k_1 (k_1 + k_2) \ldots (k_1 + \ldots + k_n)}. \quad (3.5)$$

Используем предельное соотношение [3, стр. 88]

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{p \to 0} pf(p). \quad (3.6)$$

Интегрируя уравнение (3.1), найдем

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)\, dt}{(1 - \mu e^{-t})^{\lambda}}. \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.5) — (3.7) можно получить различные формулы для матричной теории алгоритма Остроградского. В частном случае положим: $\varphi(t) = e^{-t}$, $\psi(p) = (p + 1)^{-1}$ и придем к формуле суммирования:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{\infty} \frac{\mu^{k_1+\ldots+k_n}}{k_1 (k_1 + k_2) \ldots (k_1 + \ldots + k_n)(k_1 + \ldots + k_n + 1)} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1 - \mu e^{-t})} = \frac{1 - (1 - \mu)^{1-\lambda}}{\mu (1 - \lambda)}. \quad (3.8)$$

Устремляя μ к единице и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим формулу (2.7).

Найдем, например, математические ожидания

$$M[(p_n + 1)^{\nu}] = \sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{\infty} \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n + 1)^{\nu-1}}{k_1 (k_1 + k_2) \ldots (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)}. \quad (3.9)$$

Полагая в формулах (3.5) — (3.7)

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\nu} e^{-t}}{\Gamma(1 - \nu)}, \quad \psi(p) = (p + 1)^{\nu+1},$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ и устремляя μ к единице, получим

$$M[(p_n + 1)^{\nu}] = \frac{1}{\Gamma(1 + n)\Gamma(1 - \nu)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\nu} [-\ln(1 - e^{-t})]^n\, dt. \quad (3.10)$$

Интеграл сходится при $\nu < 1$. При $\nu = 1$ интеграл расходится, что соответствует (2.4).

4. Математическое ожидание ошибки разложения. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Оценим величину

$$\varepsilon_n = (-1)^n M\left[\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right] = M\left[\frac{\alpha_{n+1}}{Q_n}\right] \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (4.1)$$

которая определяет в среднем ошибку приближения числа α ее n-й подходящей дробью. Так как длины интервалов разбиения известны, то получим:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 (k_1 + k_2)^2 \ldots (k_1 + \ldots + k_n)^2 (k_1 + \ldots + k_n + 1)^2}. \quad (4.2)$$

Используя формулы (2.6), (2.7), сразу находим оценки

$$\frac{1}{2(n+1)!\,(n+1)!} < \varepsilon_n < \frac{1}{2(n+1)!}. \quad (4.3)$$

Просуммируем ряд (4.2). Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k e^{-kt} y(t) + t e^{-t}, \qquad y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0. \quad (4.4)$$

Для изображения $f(p)$ решения $y(t)$ получим разностное уравнение:

$$f(p) = \frac{1}{p^2 (p+1)^2} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{p^2 (p+1)^2} f(p+k), \quad (4.5)$$

для которого находим решение в виде ряда:

$$f(p) = \frac{1}{p^2 (p+1)^2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{\infty} \frac{\mu^{k_1 + \ldots + k_n}}{p^2 (p + k_1)^2 \ldots (p + k_1 + \ldots + k_n + 1)^2}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.4) можно записать в другом виде:

$$(1 - \mu e^{-t}) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \lambda \mu e^{-t} y(t) + t (e^{-t} - \mu e^{-2t}). \quad (4.7)$$

Для изображения $f(p)$ получим разностное уравнение:

$$p^2 f(p) = \mu [\lambda + (p+1)^2] f(p+1) + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+2)^2}, \quad (4.8)$$

для которого находим решение в виде ряда по степеням параметра μ

$$f(p) = \frac{1}{p^2 (p+1)^2} + \frac{\mu [\lambda + (p+1)^2]}{p^2 (p+1)^2 (p+2)^2} +$$

$$+ \frac{\mu^2 [\lambda + (p+1)^2][\lambda + (p+2)^2]}{p^2 (p+1)^2 (p+2)^2 (p+3)^2} + \ldots - \frac{\mu}{p^2 (p+2)^2} -$$

$$- \frac{\mu^2 [\lambda + (p+1)^2]}{p^2 (p+1)^2 (p+3)^2} - \frac{\mu^3 [\lambda + (p+1)^2][\lambda + (p+2)^2]}{p^2 (p+1)^2 (p+2)^2 (p+4)^2} - \ldots \quad (4.9)$$

Имея два выражения (4.6), (4.9), для $f(p)$ вычислим величину

$$A = \lim p^2 f(p), \quad p \to 0, \quad \mu \to 1. \quad (4.10)$$

Придем к равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2(k_1+k_2)^2\ldots(k_1+\ldots+k_n)^2(k_1+\ldots+k_n+1)^2}=$$

$$=\frac{\lambda}{2!2!}+\frac{\lambda(\lambda+1^2)}{3!3!}+\frac{\lambda(\lambda+1^2)(\lambda+2^2)}{4!4!}+\frac{\lambda(\lambda+1^2)(\lambda+2^2)(\lambda+3^2)}{5!5!}+\ldots.$$

Это равенство можно переписать в другой форме:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\varepsilon_n=\frac{\lambda}{1^22^2}+\frac{\lambda}{2^23^2}\left(1+\frac{\lambda}{1^2}\right)+\frac{\lambda}{3^24^2}\left(1+\frac{\lambda}{1^2}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\lambda}{2^2}\right)+\frac{\lambda}{4^25^2}\left(1+\frac{\lambda}{1^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{2^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{3^2}\right)+\ldots. \qquad (4.11)$$

Используем известное разложение элементарной функции

$$\frac{\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\pi\sqrt{\lambda}}{\pi}=\lambda+\frac{\lambda^2\pi^2}{3!}+\frac{\lambda^3\pi^4}{5!}+\frac{\lambda^4\pi^6}{7!}+\ldots=$$

$$=\lambda\left(1+\frac{\lambda}{1^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda}{n^2}\right)\ldots$$

и формулу Эйлера для суммирования

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2(k+2)^2}=\frac{1}{3n^3}+O(n^{-4}).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим асимптотическую формулу для ε_n

$$\varepsilon_n=\frac{\pi^{2n-2}}{3n^2(2n)!}(1+O(n^{-1})),\quad n\to\infty. \qquad (4.12)$$

Оценка (4.12) показывает большую эффективность первого алгоритма Остроградского для приближения иррациональных чисел.

5. Обобщение алгоритма Остроградского. Пусть X — сепарабельное пространство, A_k — линейные операторы, отображающие X в X, $\{y_k\}$ — счетное множество элементов $y_k\in X$. Предполагается, что

$$\|A_k\|\leqslant\delta<1,\qquad \|y_k\|\leqslant M=\text{const}. \qquad (5.1)$$

Пусть для любого $x\in X$, $\|x\|\leqslant 1$ всегда найдутся такие A_k, $y\in\{y_k\}$, что будет выполнено неравенство

$$\|A_k^{-1}x-y\|<1. \qquad (5.2)$$

Возьмем произвольный элемент $x_1\in X$, $\|x_1\|\leqslant 1$ и установим процесс приближений, нумеруя заново операторы A_k и элементы y_k

$$A_n^{-1}x_n-y_n=x_{n+1},\quad \|x_{n+1}\|<1\quad (n=1,2,\ldots).$$

Исключая $x_2, x_3,\ldots$, получим разложение в равномерно сходящийся ряд:

$$x_1=A_1y_1+A_1A_2y_2+A_1A_2A_3y_3+\ldots. \qquad (5.3)$$

Пусть пространство X составляет множество вещественных чисел. Первый алгоритм Остроградского получится, если в качестве операторов A_k возьмем умножение на дроби k^{-1} $(k = 1, 2, \ldots)$, а в качестве $y_k = -1$. Если в качестве операторов A_k взять умножение на дробь m^{-1}, а в качестве чисел y_k взять числа $0, 1, \ldots, m-1$, то получим обычное представление числа в m-й системе исчисления.

Пример. Если возьмем в качестве операторов A_k умножение на числа k^{-1}, $y_k = 1$, то получим разложение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 16} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 16\cdot 18} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 16\cdot 18\cdot 78} \pm 10^{-8}.$$

Если в качестве чисел y_k взять числа ± 1, то получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{3\cdot 8\cdot 34} - \frac{1}{3\cdot 8\cdot 34\cdot 1154} \pm 10^{-8}.$$

Если в качестве операторов A_k возьмем умножение на числа k^{-1}, $2k^{-1}$, а в качестве чисел y_k возьмем числа ± 1, то получим разложение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{33} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{33}\cdot\frac{1}{1120} \pm 10^{-8}.$$

Для указанных способов можно найти аналогичные формулы для среднего значения ошибки n-го приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Ремез, О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел, УМН, т. 6, вып. 5, 1951.
2. А. Я. Хинтин, Цепные дроби, Физматгиз, М., 1961.
3. И. З. Штокало, Операционное исчисление, «Наукова думка», К., 1972.

Поступила 19.IX 1972 г.
Киевский институт инженеров гражданской авиации