УДК 517.948:513.88:517.5:518

Представление некоторых функций двух переменных в виде предела последовательности операторов

З. В. Зарицкая

Вопрос о приближении функций $f(x, y)$ при помощи операторов

$$Б_{nm}(f;\,x,\,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}f\left(\frac{k-i}{n},\,\frac{i}{m}\right)C_k^i\,\frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,\,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\,x^{k-i}y^i \qquad (1)$$

в случае, когда $f(x, y)$ непрерывна, рассмотрел В. И. Волков [1]. Линейные положительные операторы (1) являются обобщением на двумерный случай линейных положительных операторов В. А. Баскакова [2]. При этом для системы функций $\varphi_{nm}(x, y)$ выполняются условия:

1) функции $\varphi_{nm}(x, y)$ — аналитические в замкнутом прямоугольнике $[0\leqslant x\leqslant 2;\ 0\leqslant y\leqslant 2]$;

2) $\varphi_{nm}(0, 0)=1$;

3) $$\frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,\,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}=-n\left[\frac{\partial^{k-1}\varphi_{n_1m}(x,\,y)}{\partial x^{k-i-1}\partial y^i}+\alpha_{nk}(x,\,y)\right]=$$
$$=-m\left[\frac{\partial^{k-1}\varphi_{nm_1}(x,\,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^{i-1}}+\beta_{mk}(x,\,y)\right],$$
$$|\alpha_{nk}(x,\,y)|\leqslant\alpha_n,\quad \alpha_n\to 0,\qquad |\beta_{mk}(x,\,y)|\leqslant\beta_m,\quad \beta_m\to 0;$$

4) $\dfrac{n_1}{n}\to 1,\ n\to\infty;\ \dfrac{m_1}{m}\to 1,\ m\to\infty;$

5) $(-1)^k\dfrac{\partial^k\varphi_{nm}(x,\,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\geqslant 0$ для всех k и i, которые удовлетворяют неравенствам $0\leqslant i\leqslant k$.

Рассматривая операторы

$$A_{nm}(f;\,x,\,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\,\frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,\,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\,x^{k-i}y^i\psi_{k,i}^{n,m}, \qquad (2)$$

где $\psi_{k,i}^{n,m}=\underset{\frac{k-i}{n}-3n^{-\frac{1}{6}}}{\overset{\frac{k-i}{n}+3n^{-\frac{1}{6}}}{m}}\cdot\underset{\frac{i}{m}-3m^{-\frac{1}{6}}}{\overset{\frac{i}{m}+3m^{-\frac{1}{6}}}{m}}[f(x,\,y)]_l$ — среднее метрическое функции

$$[f(x,\,y)]_l=\begin{cases}f(x,\,y), & \text{если } |f(x,\,y)|\leqslant l,\\ l, & \text{если } f(x,\,y)>l,\\ -l, & \text{если } f(x,\,y)<-l,\ l=\min\{m,\,n\}\end{cases}$$

в прямоугольнике $\left[\dfrac{k-i}{n}-3n^{-\frac{1}{6}},\quad \dfrac{k-i}{n}+3n^{-\frac{1}{6}};\quad \dfrac{i}{m}-3m^{-\frac{1}{6}},\right.$ $\left.\dfrac{i}{m}+3m^{-\frac{1}{6}}\right]$, полученные из (1) по схеме Л. В. Канторовича [3], докажем, что последовательность (2) сходится к $f(x, y)$ в каждой точке аппроксимативной непрерывности функции $f(x, y)$.

Определение 1. Средним метрическим функции $f(x, y)$ на $R = [a, b; c, d]$ называется такое число h, что

$$\operatorname*{mes}_{x,y} E\,[f(x, y) \geqslant h] \geqslant \frac{\operatorname{mes} R}{2}, \quad \operatorname*{mes}_{x,y} E\,[f(x, y) \geqslant h + \varepsilon] < \frac{\operatorname{mes} R}{2},$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Среднее метрическое функции $f(x, y)$ на $R = [a, b; c, d]$ будем обозначать через $\underset{a}{\overset{b}{m}} \cdot \underset{c}{\overset{d}{m}}\, f(x, y)$. Это понятие ввел Л. В. Канторович [3] для функций одной переменной и распространил И. А. Киприянов на измеримые функции двух переменных. Из леммы 6 И. А. Киприянова [4] вытекает, что это определение имеет смысл.

Определение 2. Функцию $f(x, y)$, заданную на $Q = (0, 1; 0, 1)$, называем аппроксимативно непрерывной в точке $(x_0, y_0) \in Q$, если по $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < h < \delta$, $0 < k < \delta$

$$\operatorname*{mes}_{x,y} E\,[|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, \quad |x - x_0| < h,\ |y - y_0| < k] < 4hk \cdot \eta,$$
$$\eta \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Лемма. *Если в условии 3) $\alpha_{nk}(x, y) = \beta_{mk}(x, y) = 0$, а в условии 4) $n_1 = n + \bar{c}$, $m_1 = m + c$, где $\bar{c}$, c — некоторые постоянные, и выполняется по крайней мере одно из неравенств $\left|\frac{i}{m} - y\right| \geqslant m^{-\frac{1}{6}}$ или $\left|\frac{k-i}{n} - x\right| \geqslant n^{-\frac{1}{6}}$, то при $(x, y) \in [0, 1; 0, 1]$*

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \sum_i C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x^{k-i} y^i \leqslant N\left(\frac{1}{n^{4/3}} + \frac{1}{m^{4/3}}\right),$$

N — некоторая постоянная.

Доказательство. Разложим функцию $\varphi_{nm}(x, y)$ в ряд Тейлора

$$\varphi_{nm}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (\xi - x)^{k-i} (\eta - y)^i.$$

Используя условие 2), получим

$$\varphi_{nm}(0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i = 1. \tag{3}$$

Положим

$$S_{mp} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} i^p C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i. \tag{4}$$

В силу (3) будем иметь

$$S_{m0} = 1. \tag{5}$$

Легко видеть, что справедливо тождество

$$S_{mp} = my\,\{S_{m_1, p-1} + C_{p-1}^1 S_{m_1, p-2} + C_{p-1}^2 S_{m_1, p-3} + \ldots + C_{p-1}^{p-1} S_{m_1, 0}\} \tag{6}$$

при любом $p = 1, 2, 3, \ldots$. В самом деле, в силу условия

$$\frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} = -m \frac{\partial^{k-1} \varphi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{i-1}},$$

учитывая, что при $i = 0$ члены в (4) обращаются в 0, получим

$$S_{mp} = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{k} i^{p-1} \frac{i}{k} C_k^i \frac{\partial^{k-1} \varphi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{i-1}} x^{k-i} y^i.$$

Вынося y за знак суммы и приняв во внимание равенство $\frac{i}{k} C_k^i = C_{k-1}^{i-1}$, будем иметь

$$S_{mp} = my \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (i+1)^{p-1} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x^{k-i} y^i,$$

если предварительно заменим индексы $k-1$ на k, $i-1$ на i. Разложив $(i+1)^{p-1}$ по правилу бинома, получим (6).

Положив в (6) $p = 1$, будем иметь

$$S_{m1} = my. \tag{7}$$

Полагая в формуле (6) $p = 2, 3, 4$ и учитывая (5) и (7), будем иметь

$$S_{m2} = mm_1 y^2 + my, \tag{8}$$

$$S_{m3} = mm_1 m_2 y^3 + 3mm_1 y^2 + my, \tag{9}$$

$$S_{m4} = mm_1 m_2 m_3 y^4 + 6mm_1 m_2 y^3 + 7mm_1 y^2 + my. \tag{10}$$

Умножив (10) на 1, (9) на $-4my$, (8) — на $6m^2y^2$, (7) на $-4m^3y^3$, (5) на m^4y^4 и принимая во внимание, что $m_1 = m + C$, $m_2 = m_1 + C$, $m_3 = m_2 + C$, получим тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} (i - my)^4 C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i =$$

$$= y^4 m [3C^2 + 6C^3] + y^3 m [6Cm + 12C^2] + y^2 [3m^2 + 7mC] + my,$$

из которого вытекает

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{m} - y\right)^4 C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x^{k-i} y^i =$$

$$= y^4 \frac{3C^2 m + 6C^3}{m^3} + y^3 \frac{6Cm + 12C^2}{m^3} + y^2 \frac{3m + 7C}{m^3} + y \frac{1}{m^3} \leqslant N \frac{1}{m^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{\left|\frac{i}{m} - y\right| \geqslant m^{-\frac{1}{6}}} \sum \leqslant m^{\frac{4}{6}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{m} - y\right)^4 C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \times$$

$$\times x^{k-i} y^i \leqslant m^{\frac{2}{3}} N \frac{1}{m^2} = \frac{N}{m^{\frac{4}{3}}}.$$

Аналогично, легко показать, что $\displaystyle\sum_{\left|\frac{k-i}{n} - x\right| \geqslant n^{-\frac{1}{6}}} \sum \leqslant \frac{N}{n^{\frac{4}{3}}}$. Из последних двух неравенств следует лемма.

Теорема. *Если $f(x, y)$ — произвольная измеримая конечная в $[0, 1; 0,1]$ функция, а на весь первый квадрант продолжена единицей, то в условиях леммы для последовательности операторов* (2) *имеет место в каждой точке аппроксимативной непрерывности функции f квадрата* $(0,1; 0,1)$ *предельное равенство*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} A_{nm}(f; x, y) = f(x, y).$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in (0, 1; 0, 1)$ — точка аппроксимативной непрерывности функции $f(x, y)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется столь малое δ, что при $0 < h, k < \delta$

$$\operatorname*{mes}_{x,y} E\{|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, |x - x_0| < h, |y - y_0| < k\} < hk. \tag{11}$$

Пусть теперь n, m настолько велики, что $|f(x_0, y_0) < l$, $4n^{-\frac{1}{6}} < \delta$, $4m^{-\frac{1}{6}} < \delta$. Оценим разность $A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$:

$$|A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x_0^{k-i} y_0 [\psi_{k,i}^{n,m} - f(x_0, y_0)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) \in Q} \sum + \sum_{\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) \bar{\in} Q} \sum \equiv \sum_{k,i} \sum\nolimits_{(1)} + \sum_{k,i} \sum\nolimits_{(2)},$$

$$Q = [x_0 - n^{-\frac{1}{6}}, \quad x_0 + n^{-\frac{1}{6}}; \ y_0 - m^{-\frac{1}{6}}, y_0 + m^{-\frac{1}{6}}].$$

На основании леммы

$$\sum_{k,i} \sum\nolimits_{(2)} \leqslant 2l \sum_{\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) \bar{\in} Q} \sum \leqslant 2lN \left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{m^{\frac{4}{3}}} \right) =$$

$$= 2N \left(\frac{l}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{l}{m^{\frac{4}{3}}} \right) \leqslant 2N \left(\frac{n}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{m}{m^{\frac{4}{3}}} \right) = 2N \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} \right). \tag{12}$$

Что касается $\sum_{k,i} \sum_{(1)}$, то вследствие (11) при $4n^{-\frac{1}{6}} < \delta$, $4m^{-\frac{1}{6}} < \delta$

$$\operatorname*{mes}_{x,y} E[|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, |x - x_0| < 4n^{-\frac{1}{6}}, |y - y_0| <$$

$$< 4m^{-\frac{1}{6}}] < 16(nm)^{-\frac{1}{6}}$$

и i и k, удовлетворяющих условиям $\left| \dfrac{k-i}{n} - x_0 \right| \leqslant n^{-\frac{1}{6}}$, $\left| \dfrac{i}{m} - y_0 \right| \leqslant m^{-\frac{1}{6}}$,

$$\operatorname*{mes}_{x,y} E \left[|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, \left| x - \frac{k-i}{n} \right| < 3n^{-\frac{1}{6}}, \right.$$

$$\left. \left| y - \frac{i}{m} \right| < 3m^{-\frac{1}{6}} \right] < 16(nm)^{-\frac{1}{6}}.$$

Следовательно, на плоском промежутке $r = \left(\frac{k-i}{n} - 3n^{-\frac{1}{6}}, \frac{k-i}{n} + 3n^{-\frac{1}{6}}; \frac{i}{m} - 3m^{-\frac{1}{6}}, \frac{i}{m} + 3m^{-\frac{1}{6}}\right)$

$$\operatorname{mes} E\left[\left|f(x, y) - f(x_0, y_0)\right| > \varepsilon\right] < \frac{\operatorname{mes} r}{2}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что

$$\operatorname*{mes}_{(x,y)\in r} E\left[f(x, y) > f(x_0, y_0) + \varepsilon\right] < \frac{\operatorname{mes} r}{2}.$$

Но тогда по определению среднего метрического

$$\psi_{k,i}^{n,m} \leqslant f(x_0, y_0) + \varepsilon. \tag{14}$$

Из того же (13) вытекает, что

$$\operatorname*{mes}_{(x,y)\in r} E\left[f(x, y) < f(x_0, y_0) - \varepsilon\right] < \frac{\operatorname{mes} r}{2},$$

и тогда

$$\operatorname*{mes}_{(x,y)\in r} E\left[f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0) - \varepsilon\right] \geqslant \frac{\operatorname{mes} r}{2},$$

а по определению среднего метрического

$$\psi_{k,i}^{n,m} \geqslant f(x_0, y_0) - \varepsilon. \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем

$$\left|\psi_{k,i}^{n,m} - f(x_0, y_0)\right| < \varepsilon \text{ при } \left|x_0 - \frac{k-i}{n}\right| \leqslant n^{-\frac{1}{6}}, \ \left|y_0 - \frac{i}{m}\right| \leqslant m^{-\frac{1}{6}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k,i}\sum\nolimits_{(1)} < \varepsilon \sum_{\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right)\in Q}\sum \frac{(-1)^k}{k!} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i} x^{k-i} y^i \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Окончательно из (12) и (16) получим

$$A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и } m \to \infty.$$

Теорема является распространением соответствующей теоремы Э. Н. Морозова [5] на двумерный случай. Отметим, что при $\varphi_{nm}(x, y) = (1-x)^n (1-y)^m$ из доказанной теоремы вытекает теорема 5 И. А Киприянова [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Волков, О сходимости последовательностей линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных, ДАН СССР, т. 115, № 1, 1957.
2. В. А. Баскаков, Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций, ДАН СССР, т. 113, № 2, 1957.
3. Л. В. Канторович, О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. II, ДАН СССР, А, № 22, 1930.
4. И. А. Киприянов, О полиномах формы С. Н. Бернштейна для функций 2-х переменных, Уч. зап. Казан. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953.
5. Э. Н. Морозов, Представление некоторых функций в виде предела последовательности операторов, Уч. зап. Калужского пед. ин-та, вып. 12 (физ.-матем. науки), Калуга, 1963.

Поступила 27.II 1973 г.

Луцкий педагогический институт