

Представление некоторых функций двух переменных в виде предела последовательности операторов

З. В. Зарицкая

Вопрос о приближении функций $f(x, y)$ при помощи операторов

$$B_{nm}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k f\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i \quad (1)$$

в случае, когда $f(x, y)$ непрерывна, рассмотрел В. И. Волков [1]. Линейные положительные операторы (1) являются обобщением на двумерный случай линейных положительных операторов В. А. Баскакова [2]. При этом для системы функций $\Phi_{nm}(x, y)$ выполняются условия:

1) функции $\Phi_{nm}(x, y)$ — аналитические в замкнутом прямоугольнике $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 2$;

2) $\Phi_{nm}(0, 0) = 1$;

$$3) \quad \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} = -n \left[\frac{\partial^{k-1} \Phi_{n_1, m}(x, y)}{\partial x^{k-i-1} \partial y^i} + \alpha_{nk}(x, y) \right] = \\ = -m \left[\frac{\partial^{k-1} \Phi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{i-1}} + \beta_{mk}(x, y) \right],$$

$$|\alpha_{nk}(x, y)| \leq \alpha_n, \quad \alpha_n \rightarrow 0, \quad |\beta_{mk}(x, y)| \leq \beta_m, \quad \beta_m \rightarrow 0;$$

$$4) \quad \frac{n_1}{n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty; \quad \frac{m_1}{m} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty;$$

5) $(-1)^k \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \geq 0$ для всех k и i , которые удовлетворяют неравенствам $0 \leq i \leq k$.

Рассматривая операторы

$$A_{nm}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i \Psi_{k,i}^{n,m}, \quad (2)$$

где $\Psi_{k,i}^{n,m} = \frac{\frac{k-i}{n} + 3n - \frac{1}{6}}{m} \cdot \frac{\frac{i}{m} + 3m - \frac{1}{6}}{m} [f(x, y)]_l$ — среднее метрическое функции

$$[f(x, y)]_l = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } |f(x, y)| \leq l, \\ l, & \text{если } f(x, y) > l, \\ -l, & \text{если } f(x, y) < -l, \quad l = \min\{m, n\} \end{cases}$$

в прямоугольнике $\left[\frac{k-i}{n} - 3n^{-\frac{1}{6}}, \quad \frac{k-i}{n} + 3n^{-\frac{1}{6}}; \quad \frac{i}{m} - 3m^{-\frac{1}{6}}, \quad \frac{i}{m} + 3m^{-\frac{1}{6}} \right]$, полученные из (1) по схеме Л. В. Канторовича [3], докажем, что последовательность (2) сходится к $f(x, y)$ в каждой точке аппроксимативной непрерывности функции $f(x, y)$.

Определение 1. Средним метрическим функции $f(x, y)$ на $R = [a, b; c, d]$ называется такое число h , что

$$\text{mes}_{x,y} E [f(x, y) \geq h] \geq \frac{\text{mes } R}{2}, \quad \text{mes}_{x,y} E [f(x, y) \geq h + \varepsilon] < \frac{\text{mes } R}{2},$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Среднее метрическое функции $f(x, y)$ на $R = [a, b; c, d]$ будем обозначать через $\bar{m} \cdot \bar{m} f(x, y)$. Это понятие ввел Л. В. Канторович [3] для функций одной переменной и распространил И. А. Киприянов на измеримые функции двух переменных. Из леммы 6 И. А. Киприянова [4] вытекает, что это определение имеет смысл.

Определение 2. Функцию $f(x, y)$, заданную на $Q = (0, 1; 0, 1)$, называем аппроксимативно непрерывной в точке $(x_0, y_0) \in Q$, если по $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < h < \delta$, $0 < k < \delta$

$$\text{mes}_{x,y} E [|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, |x - x_0| < h, |y - y_0| < k] < 4hk \cdot \eta, \\ \eta \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Лемма. Если в условии 3) $\alpha_{nh}(x, y) = \beta_{mh}(x, y) = 0$, а в условии 4) $n_1 = n + \bar{c}$, $m_1 = m + \bar{c}$, где \bar{c}, \bar{c} — некоторые постоянные, и выполняется по крайней мере одно из неравенств $\left| \frac{i}{m} - y \right| \geq m^{-\frac{1}{6}}$ или $\left| \frac{k-i}{n} - x \right| \geq n^{-\frac{1}{6}}$, то при $(x, y) \in [0, 1; 0, 1]$

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \sum_i C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x^{k-i} y^i \leq N \left(\frac{1}{n^{4/3}} + \frac{1}{m^{4/3}} \right),$$

N — некоторая постоянная.

Доказательство. Разложим функцию $\Phi_{nm}(x, y)$ в ряд Тейлора

$$\Phi_{nm}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (\xi - x)^{k-i} (\eta - y)^i.$$

Используя условие 2), получим

$$\Phi_{nm}(0, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i = 1. \quad (3)$$

Положим

$$S_{mp} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k i^p C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i. \quad (4)$$

В силу (3) будем иметь

$$S_{m0} = 1. \quad (5)$$

Легко видеть, что справедливо тождество

$$S_{mp} = m y \{ S_{m, p-1} + C_{p-1}^1 S_{m, p-2} + C_{p-1}^2 S_{m, p-3} + \dots + C_{p-1}^{p-1} S_{m, 0} \} \quad (6)$$

при любом $p = 1, 2, 3, \dots$. В самом деле, в силу условия

$$\frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} = -m \frac{\partial^{k-1} \Phi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{i-1}},$$

учитывая, что при $i = 0$ члены в (4) обращаются в 0, получим

$$S_{mp} = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{i=1}^k i^{p-1} \frac{i}{k} C_k^i \frac{\partial^{k-1} \Phi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{i-1}} x^{k-i} y^i.$$

Вынося y за знак суммы и приняв во внимание равенство $\frac{i}{k} C_k^i = C_{k-1}^{i-1}$, будем иметь

$$S_{mp} = my \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k (i+1)^{p-1} C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm_1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x^{k-i} y^i,$$

если предварительно заменим индексы $k-1$ на k , $i-1$ на i . Разложив $(i+1)^{p-1}$ по правилу бинома, получим (6).

Положив в (6) $p = 1$, будем иметь

$$S_{m1} = my. \quad (7)$$

Полагая в формуле (6) $p = 2, 3, 4$ и учитывая (5) и (7), будем иметь

$$S_{m2} = mm_1 y^2 + my, \quad (8)$$

$$S_{m3} = mm_1 m_2 y^3 + 3mm_1 y^2 + my, \quad (9)$$

$$S_{m4} = mm_1 m_2 m_3 y^4 + 6mm_1 m_2 y^3 + 7mm_1 y^2 + my. \quad (10)$$

Умножив (10) на 1, (9) на $-4my$, (8) на $6m^2 y^2$, (7) на $-4m^3 y^3$, (5) на $m^4 y^4$ и принимая во внимание, что $m_1 = m + C$, $m_2 = m_1 + C$, $m_3 = m_2 + C$, получим тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k (i-my)^4 C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i = \\ & = y^4 m [3C^2 + 6C^3] + y^3 m [6Cm + 12C^2] + y^2 [3m^2 + 7mC] + my, \end{aligned}$$

из которого вытекает

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k \left(\frac{i}{m} - y\right)^4 C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x^{k-i} y^i = \\ & = y^4 \frac{3C^2 m + 6C^3}{m^3} + y^3 \frac{6Cm + 12C^2}{m^3} + y^2 \frac{3m + 7C}{m^3} + y \frac{1}{m^3} \leq N \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum \sum_{\left| \frac{i}{m} - y \right| > m^{-\frac{1}{6}}} & \leq m^{\frac{4}{6}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k \left(\frac{i}{m} - y\right)^4 C_k^i \frac{\partial^k \Phi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \times \\ & \times x^{k-i} y^i \leq m^{\frac{2}{3}} N \frac{1}{m^2} = \frac{N}{m^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Аналогично, легко показать, что $\sum \sum_{\left| \frac{k-i}{n} - x \right| > n^{-\frac{1}{6}}} \leq \frac{N}{n^{\frac{4}{3}}}$. Из последних двух

неравенств следует лемма.

Теорема. Если $f(x, y)$ — произвольная измеримая конечная в $[0, 1; 0, 1]$ функция, а на весь первый квадрант продолжена единицей, то в условиях леммы для последовательности операторов (2) имеет место в каждой точке аппроксимативной непрерывности функции f квадрата $(0, 1; 0, 1)$ предельное равенство

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} A_{nm}(f; x, y) = f(x, y).$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in (0, 1; 0, 1)$ — точка аппроксимативной непрерывности функции $f(x, y)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется столь малое δ , что при $0 < h, k < \delta$

$$\text{mes}_{x,y} E \{ |f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, |x - x_0| < h, |y - y_0| < k \} < hk. \quad (11)$$

Пусть теперь n, m настолько велики, что $|f(x_0, y_0)| < l, 4n^{-\frac{1}{6}} < \delta, 4m^{-\frac{1}{6}} < \delta$. Оценим разность $A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} & |A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| = \\ & = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x_0^{k-i} y_0^i [\Psi_{k,i}^{n,m} - f(x_0, y_0)] \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{(k-i, i) \in Q \\ (\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}) \in Q}} \sum_{\substack{(k-i, i) \in Q \\ (\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}) \in Q}} \equiv \sum_{k,i} \sum_{(1)} + \sum_{k,i} \sum_{(2)}, \end{aligned}$$

$$Q = [x_0 - n^{-\frac{1}{6}}, x_0 + n^{-\frac{1}{6}}; y_0 - m^{-\frac{1}{6}}, y_0 + m^{-\frac{1}{6}}].$$

На основании леммы

$$\begin{aligned} & \sum_{k,i} \sum_{(2)} \leq 2l \sum_{\substack{(k-i, i) \in Q \\ (\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}) \in Q}} \leq 2lN \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} \right) = \\ & = 2N \left(\frac{l}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{l}{m^{\frac{1}{3}}} \right) \leq 2N \left(\frac{n}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{m}{m^{\frac{1}{3}}} \right) = 2N \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Что касается $\sum_{k,i} \sum_{(1)}$, то вследствие (11) при $4n^{-\frac{1}{6}} < \delta, 4m^{-\frac{1}{6}} < \delta$

$$\begin{aligned} & \text{mes}_{x,y} E \{ |f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, |x - x_0| < 4n^{-\frac{1}{6}}, |y - y_0| < \\ & < 4m^{-\frac{1}{6}} \} < 16(nm)^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

и i и k , удовлетворяющих условиям $\left| \frac{k-i}{n} - x_0 \right| \leq n^{-\frac{1}{6}}, \left| \frac{i}{m} - y_0 \right| \leq m^{-\frac{1}{6}}$,

$$\text{mes}_{x,y} E \left[|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon, \left| x - \frac{k-i}{n} \right| < 3n^{-\frac{1}{6}}, \right.$$

$$\left. \left| y - \frac{i}{m} \right| < 3m^{-\frac{1}{6}} \right] < 16(nm)^{-\frac{1}{6}}.$$

Следовательно, на плоском промежутке $r = \left(\frac{k-i}{n} - 3n^{-\frac{1}{6}}, \frac{k-i}{n} + 3n^{-\frac{1}{6}}; \frac{i}{m} - 3m^{-\frac{1}{6}}, \frac{i}{m} + 3m^{-\frac{1}{6}} \right)$

$$\text{mes } E [|f(x, y) - f(x_0, y_0)| > \varepsilon] < \frac{\text{mes } r}{2}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что

$$\text{mes}_{(x,y) \in r} E [f(x, y) > f(x_0, y_0) + \varepsilon] < \frac{\text{mes } r}{2}.$$

Но тогда по определению среднего метрического

$$\Psi_{k,i}^{n,m} \leq f(x_0, y_0) + \varepsilon. \quad (14)$$

Из того же (13) вытекает, что

$$\text{mes}_{(x,y) \in r} E [f(x, y) < f(x_0, y_0) - \varepsilon] < \frac{\text{mes } r}{2},$$

и тогда

$$\text{mes}_{(x,y) \in r} E [f(x, y) \geq f(x_0, y_0) - \varepsilon] \geq \frac{\text{mes } r}{2},$$

а по определению среднего метрического

$$\Psi_{k,i}^{n,m} \geq f(x_0, y_0) - \varepsilon. \quad (15)$$

Из (14) и (15) имеем

$$|\Psi_{k,i}^{n,m} - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \text{ при } \left| x_0 - \frac{k-i}{n} \right| \leq n^{-\frac{1}{6}}, \left| y_0 - \frac{i}{m} \right| \leq m^{-\frac{1}{6}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k,i} \sum_{(1)} < \varepsilon \sum_{\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) \in Q} \frac{(-1)^k}{k!} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Окончательно из (12) и (16) получим

$$A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } m \rightarrow \infty.$$

Теорема является распространением соответствующей теоремы Э. Н. Морозова [5] на двумерный случай. Отметим, что при $\varphi_{nm}(x, y) = (1-x)^n (1-y)^m$ из доказанной теоремы вытекает теорема 5 И. А. Киприянова [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Волков, О сходимости последовательностей линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных, ДАН СССР, т. 115, № 1, 1957.
2. В. А. Баскаков, Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций, ДАН СССР, т. 113, № 2, 1957.
3. Л. В. Канторович, О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. II, ДАН СССР, А, № 22, 1930.
4. И. А. Киприянов, О полиномах формы С. Н. Бернштейна для функций 2-х переменных, Уч. зап. Казан. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953.
5. Э. Н. Морозов, Представление некоторых функций в виде предела последовательности операторов, Уч. зап. Калужского пед. ин-та, вып. 12 (физ.-матем. науки), Калуга, 1963.

Поступила 27.II 1973 г.

Луцкий педагогический институт