УДК 517.946.9

Об асимптотике решения первой краевой задачи уравнения теплопроводности в случае подвижной границы

В. И. Калиниченко, Г. А. Несененко

В работе изучается асимптотика при $\alpha \to 0$ решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u(x, t) \xrightarrow[t \to 0]{} f(x); \qquad u(x, t) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0; \tag{1}$$

$$u(\varphi(t), t) = 0; \quad (t, x) \in \Omega = \{(t, x) : x < \varphi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \theta\}.$$

Предполагается, что $f(x)$, $\varphi(t)$ и $\theta > 0$ таковы, что решение задачи (1) существует и единственно. Для простоты рассматривается случай непрерывной и ограниченной $f(x)$ при $\varphi(0) > x > -\infty$. Кроме того, предполагается, что любую точку $(t, x) \in \Omega$ можно соединить с осью ординат Ox прямой, параллельной оси абсцисс Ot и целиком лежащей в Ω. Область Ω взята полуограниченной, чтобы не загромождать рассуждения второстепенными деталями.

Асимптотика при $\alpha > 0$ решения задачи (1) изучается при помощи функции Грина. Используя «принцип неощущаемости границы» [1] легко получить, что первый член асимптотического разложения (при $\alpha > 0$) решения задачи (1) равен $f(x)$. Дальнейшие члены асимптотического разложения уже зависят от границы и цель данной работы состоит в установлении характера этой зависимости. Полученная асимптотика решения проверяется при помощи сравнения с асимптотикой решения, которое может быть записано в явном виде для частного (нелинейного) вида $\varphi(t)$.

Для формулировки результата удобно ввести в рассмотрение функционал $S[\chi] = \int_0^t \dot{\chi}^2(\tau)\, d\tau$, определенный на кусочно-гладких функциях $\chi(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $\chi(t) = x$ и таких, что график их пересекает кривую, заданную уравнением $\chi = \varphi(t)$.

Теорема. *Допустим, что $\varphi(t) \in C^2[0, \theta]$ и функционал $S[\chi]$ имеет единственную экстремаль $\bar{\chi}(\tau)$ такую, что $\bar{\chi}(t) = x$ для любой точки $(t, x) \in \Omega$.*

Тогда при $\alpha \to 0$ справедливо соотношение

$$u(x, t) = f(x)[1 + o(1)] - \exp\left(-\frac{S[\bar{\chi}]}{4\alpha^2}\right) f(\bar{\chi}(0))\, d_0^{(1)} [1 + o(1)], \tag{2}$$

где вид $d_0^{(1)}$ дается выражением в фигурных скобках формулы (8).

Доказательство Обозначая через $\Gamma(x, t; x_0)$ функцию Грина задачи (1), представим решение исследуемой задачи в следующем виде:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\varphi(0)} \Gamma(x, t; x_0) f(x_0)\, dx_0. \tag{3}$$

Из точки с координатами (t, x), если это возможно, будем проводить всевозможные касательные к графику $\varphi(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Пусть $[0, \bar{x}_0]$ — наименьший по абсолютной величине отрезок оси ординат, отсекаемый этими касательными (не нарушая общности, принимаем $\varphi(0) = 0$). Если $\varphi(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, такова, что к ней из точки (t, x) нельзя провести касательную, полагаем $\bar{x}_0 = 0$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и перепишем (3) в следующем виде:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{0} \Gamma(x, t; x_0) f(x_0)\, dx_0 = \int_{-\infty}^{\bar{x}_0-\varepsilon} \Gamma(x, t; x_0) f(x_0)\, dx_0 +$$

$$+ \int_{\bar{x}_0-\varepsilon}^{\bar{x}_0} \Gamma(x, t; x_0) f(x_0)\, dx_0 + \int_{\bar{x}_0}^{0} \Gamma(x, t; x_0) f(x_0)\, dx_0 = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4)$$

Изучим в отдельности каждый из интегралов, стоящих справа в (4). Обращаясь к интегралу I_1, замечаем, что согласно [2] можно вместо $\Gamma(x, t; x_0)$ записать ее асимптотическое при $\alpha \to 0$ разложение. Это разложение (при $n = 0$) имеет вид

$$\Gamma(x, t; x_0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4\alpha^2 t}\right) - \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(\varphi(\tau) - x_0)^2}{4\alpha^2\tau} - \frac{(x - \varphi(\tau))^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right) d_0 [1 + o(1)], \quad (5)$$

$$d_0 = d_0(t, \tau, x) = \left\{t + 4\varphi''(\tau)\,\tau(t-\tau)\left[\frac{\varphi(\tau) - x}{t-\tau} + \frac{\varphi(\tau) - x_0}{\tau}\right]^{-1}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

где τ — корень уравнения

$$2\varphi'(\tau) = \frac{\varphi(\tau) - x_0}{\tau} + \frac{x - \varphi(\tau)}{t - \tau}. \quad (6)$$

Таким образом, с учетом (5) интеграл I_1 приобретает вид

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\bar{x}_0-\varepsilon} \left\{\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4\alpha^2 t}\right) - \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left(-\frac{(\varphi(\tau) - x_0)^2}{4\alpha^2\tau} - \frac{(x - \varphi(\tau))^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right) d_0 [1 + o(1)]\right\} f(x_0)\, dx_0. \quad (7)$$

Условия теоремы таковы, что к интегралу, стоящему справа в (7), можно применить известный метод Лапласа [3]. Опуская простые преобразования, можем записать, что при $\alpha \to 0$ справедливо соотношение

$$I_1 = f(x)[1 + o(1)] - f(\varphi(\tau_0)) \exp - \frac{(x - \varphi(\tau_0))^2}{4\alpha^2(t - \tau_0)}\Bigg) \times$$

$$\times \{d_0(t, \tau_0, x)\sqrt{\tau_0}[1 - (t - \tau_0)\, d_0^2(t, \tau_0, x)]^{-\frac{1}{2}}\}[1 + o(1)]. \quad (8)$$

Здесь τ_0 — корень уравнения

$$2\varphi'(\tau_0) = \frac{x - \varphi(\tau_0)}{t - \tau_0}, \quad (9)$$

а $d_0(t, \tau, x)$ определяется формулой (5).

Уравнение (9) — известное условие трансверсальности [4] и, согласно условиям теоремы, решение (9) существует и единственно. Очевидно, что $\dfrac{(x - \varphi(\tau_0))^2}{t - \tau_0} = S[\bar{\chi}], \quad \varphi(\tau_0) = \chi(0)$.

Оценим интеграл I_2. Для этого заметим, что согласно уже упоминавшемуся принципу неощущаемости границы, обоснованному в [5], а также результату, сформулированному в виде леммы (см. ниже), можем записать, что при $\bar{x}_0 - \varepsilon \leqslant x_0 \leqslant \bar{x}_0$ справедливо

$$\Gamma(x, t; x_0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4\bar{\alpha}^2 t}\right) \text{const}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в выражение для I_2 (см. (4)) и вновь прибегая к методу Лапласа, получаем

$$I_2 = f(\bar{x}_0 - \varepsilon) \cdot o(1) = f(x) \cdot o(1). \tag{11}$$

Теперь оценим интеграл I_3. Воспользовавшись леммой, можем записать

$$I_3 = \int_{\bar{x}_0}^{0} \Gamma(x, t; x_0) f(x_0)\, dx_0 < \int_{\bar{x}_0}^{0} \frac{\text{const}}{2\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{S[\tilde{\chi}_1]}{4\alpha^2}\right) f(x_0)\, dx_0 <$$

$$< \frac{\text{const}}{2\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{1}{4\alpha^2} - 1\right)\frac{(x - \bar{x}_0)^2}{t}\right) \int_{\bar{x}_0}^{0} f(x_0) \exp\left(-\int_0^t \dot{\tilde{\chi}}_1^2(\tau)\, d\tau\right) dx_0 =$$

$$= f(x) \cdot o(1). \tag{12}$$

Объединяя (8), (11) и (12), получаем утверждение теоремы.

Сформулируем и докажем лемму.

Пусть $\Gamma(x, t; x_0)$ — функция Грина краевой задачи (1) в том случае, когда прямая, соединяющая точки $(0, x_0)$ и (t, x), имеет общие точки с графиком $\varphi(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Введем в рассмотрение множество гладких функций $\chi_1(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, $\chi_1(0) = x_0$, $\chi_1(t) = x$ и таких, что справедливо

$$\chi_1(\tau) \leqslant \varphi(\tau). \tag{13}$$

Лемма. *Пусть $\varphi \in C^2$ и для каждого $x \in [\bar{x}_0, 0]$ существует единственная функция $\tilde{\chi}_1(\tau)$ такая, что*

$$S[\tilde{\chi}_1] \leqslant S[\chi_1]. \tag{14}$$

Тогда для любого $x_0 \in [\bar{x}_0, 0]$ справедливо соотношение

$$\Gamma(x, t; x_0) < \frac{\text{const}}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{S[\tilde{\chi}_1]}{4\alpha^2}\right). \tag{15}$$

Доказательство. Представим функцию Грина краевой задачи (1) в виде интеграла с параметром $\alpha\sqrt{2}$ по так называемой условной винеровской мере [6]

$$\Gamma(x, t; x_0) = \mathscr{E}^{\alpha\sqrt{2}}\{u(\tau) \in \Omega,\ u(0) = x_0,\ u(t) = x\}. \tag{16}$$

Рассмотрим ситуацию, к которой сводятся все прочие: пусть $(0, x_0)$, (t, x) и $\varphi(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, таковы, что график $\tilde{\chi}_1(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, имеет следующий вид.

При $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$ график $\tilde{\chi}_1(\tau)$ совпадает с отрезком прямой, соединяющей точки $(0, x_0)$ и $(\tau_1, \varphi(\tau_1))$.

При $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ — $\tilde{\chi}_1(\tau) = \varphi(\tau)$.

При $\tau_2 \leqslant \tau \leqslant t$ график $\tilde{\chi}_1(\tau)$ совпадает с отрезком прямой, соединяющей точки $(\tau_2, \varphi(\tau_2))$ и (t, x).

Сделаем сдвиг T в винеровском интеграле, стоящем справа в (16), положив

$$u(\tau) = \tilde{\chi}_1(\tau) + z(\tau). \tag{17}$$

Имеем [7]

$$\Gamma(x, t; x_0) = \exp\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^t \dot{\tilde{\chi}}_1^2(\tau)\,d\tau\right)\mathscr{E}^{\alpha\sqrt{2}}\left\{\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\int_0^t \dot{\tilde{\chi}}_1(\tau)\,dz\right);\right.$$

$$\left. z(\tau)\in T\Omega,\ z(0) = z(t) = 0\right\} = \exp\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^t \dot{\tilde{\chi}}_1^2(\tau)\,d\tau\right)\mathscr{E}^{\alpha\sqrt{2}} \times$$

$$\times\left\{\exp\left(\frac{1}{2\alpha^2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \ddot{\tilde{\chi}}_1(\tau)\,z(\tau)\,d\tau\right);\ z(\tau)\in T\Omega,\ z(0) = z(t) = 0\right\}. \tag{18}$$

Поскольку при $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ справедливо

$$\ddot{\tilde{\chi}}(\tau) > 0, \quad z(\tau) < 0, \tag{19}$$

то соотношение (18) перепишется в следующем виде:

$$\Gamma(x, t; x_0) < \exp\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^t \dot{\tilde{\chi}}_1^2(\tau)\,d\tau\right)\mathscr{E}^{\alpha\sqrt{2}}\{z(\tau)\in T\Omega,\ z(0) = z(t) = 0\} <$$

$$< \exp\left(-\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^t \dot{\tilde{\chi}}_1^2(\tau)\,d\tau\right)\mathrm{const}\,\mathscr{E}^{\alpha\sqrt{2}}\{z(\tau)\in C,\ z(0) = z(t) = 0\},$$

что совпадает с утверждением леммы.

Пример. Известно, что когда $\varphi(t) = \mathrm{const}\sqrt{t}$, то решение краевой задачи (1) для $(t, x)\in\Omega = \{(t, x): x > \varphi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \theta\}$ может быть записано в явном виде [8]. С другой стороны, показано [9], что задача о диффузии сверхсильного магнитного поля в полупространство сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \eta^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2};$$
$$H(x, 0) = 0; \qquad H(\varphi(t), t) = H_0; \tag{20}$$
$$(t, x)\in\Omega = \{(t, x): \xi < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \quad \xi = \varphi(t),$$

причем параметр η достаточно мал.

Решение краевой задачи (20) — напряженность магнитного поля $H(x, t)$ — представим в виде $H(x, t) = \mathscr{H}(x, t) + H_0$. Тогда для функции $\mathscr{H}(x, t)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \eta^2\frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial x^2};$$
$$\mathscr{H}(x, 0) = -H_0; \qquad \mathscr{H}(\xi(t), t) = 0; \tag{21}$$
$$(t, x)\in\Omega = \{(t, x): \xi < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Ясно, что задача (21) — частный случай задачи (1), так как согласно [9] $H_0 = \mathrm{const}$ и $\xi = \alpha\sqrt{t}$, причем решение существует и единственно (мы специально сохраняем обозначения из [9]). Воспользуемся доказанной теоремой для нахождения асимптотики при $\eta \to 0$ решения задачи (21). При этом, поскольку в рассматриваемом случае $f_{\bullet}(x) = -H_0 = \mathrm{const}$, можем применить более точные оценки.

В частности, обращаясь к уменьшаемому в формуле (7), можно записать $\left(\text{учитывая измененный вид } \Omega \text{ и полагая } \Lambda = \dfrac{x - x_0 + \varepsilon}{2\eta\sqrt{t}}\right)$

$$-\int\limits_{\bar{x}_0-\varepsilon}^{\infty} H_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\eta^2 t}\right)\frac{dx_0}{2\eta\sqrt{\pi t}} = -H_0\int\limits_{\Lambda}^{\infty}\exp(-u^2)\,du =$$

$$= -H_0 + H_0 \operatorname{Erfc}\Lambda = -H_0 + \frac{H_0}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\bar{x}_0+\varepsilon)^2}{4\eta^2 t}\right)\times$$

$$\times\frac{2\eta\sqrt{t}}{x-\bar{x}_0+\varepsilon}[1+o(1)]. \tag{22}$$

Далее, решение уравнения (9) таково (при $\varphi(\tau) = \alpha\sqrt{\tau}$):

$$\tau_0 = \left(\frac{\alpha t}{x}\right)^2. \tag{23}$$

Подставляя (23) в формулу для коэффициента $d_0(t, \tau_0, x)$, получаем

$$d_0(t, \tau_0, x) = \left\{t + 4\varphi''(\tau_0)\tau_0(t-\tau_0)\frac{t-\tau_0}{\varphi(\tau_0)-x}\right\}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (2t-\tau_0)^{-\frac{1}{2}} = x\,[t\,(2x^2-\alpha^2 t)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Отсюда легко определяем коэффициент $d_0^{(1)}$ (см. (2) и (8))

$$d_0^{(1)} = d_0^{(1)}(t, \tau_0, x) = \frac{d_0(t, \tau_0, x)\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{1-(t-\tau_0)\,d_0^2(t, \tau_0, x)}} = \frac{\alpha\sqrt{t}}{x}. \tag{25}$$

Объединяя (22), (8) и (25), получаем, что решение $\mathcal{H}(x, t)$ краевой задачи (21) представимо в виде

$$\mathcal{H}(x, t) = -H_0 + H_0\frac{\eta\sqrt{t}}{(x-\bar{x}_0+\varepsilon)\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\bar{x}_0+\varepsilon)^2}{4\eta^2 t}\right)\times$$

$$\times[1+o(1)] + H_0\exp\left(-\left(\frac{x^2}{t}-\alpha^2\right)\frac{1}{4\eta^2}\right)\frac{\alpha\sqrt{t}}{x}[1+o(1)]. \tag{26}$$

Отсюда функция $H(x, t)$ — решение задачи (20) при $\eta \to 0$ — имеет вид

$$H(x, t) = H_0\exp\left(-\frac{x^2}{4\eta^2 t}+\frac{\alpha^2}{4\eta^2}\right)\frac{\alpha\sqrt{t}}{x}[1+o(1)]. \tag{27}$$

Сравним (27) с асимптотикой, получаемой из точного решения. Для этого воспользуемся результатом [9], согласно которому

$$H(x, t) = \frac{H_0}{1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2\eta}\right)}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\eta\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{28}$$

Но $\Phi(z) = 1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Erfc}(z)$, причем $\mathrm{Erfc}\, z \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{z}$. Поэтому

$$H(x, t) = \frac{H_0\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{x}{2\eta\sqrt{t}}\right)}{\mathrm{Erfc}\left(\frac{\alpha}{2\eta}\right)} \underset{\eta\to 0}{\sim} H_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta^2 t} + \frac{\alpha^2}{4\eta^2}\right)\frac{\alpha\sqrt{t}}{x},$$

что совпадает с (27) и лишний раз подтверждает справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Кац, Несколько вероятностных задач физики и математики, «Наука», М., 1967.
2. Г. А. Несененко, Об асимптотике функции Грина уравнения теплопроводности с малым параметром, Матем. сб. т. 87, № 2, 1972.
3. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
4. М. Лаврентьев, Л. Люстерник, Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2, ОНТИ, 1935.
5. Z. Ciesielski, Heat Conduction and the principle of not feeling the boundary, Bulletin de l'Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astr., phys., Vol. 14, N 8, 1966.
6. R. H. Cameron, A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals, J. Math. and. Phys., Vol. 39, N 2, 1960.
7. R. H. Cameron, W. T. Martin, Transformations of Wiener integrals under translation, Ann. Math., Vol. 45, N 2, 1944.
8. J. Nordon, Sur une solution nouvelle de l'equation de Fourier, Compt. rend. hebd sean l'Academie des Sci., Vol. 228, N 2, 1949.
9. В. В. Семченко, А. В. Степанов, О диффузии импульсных сверхсильных полей, ПМТФ, № 1, 1969.

Поступила 21.V 1973 г.

Институт проблем машиностроения АН УССР,
Институт высоких температур АН СССР