УДК 517.946.82

О равенствах, определяющих вторые моменты решений стохастических дифференциальных уравнений с последействием

В. Б. Колмановский

Установлены равенства, определяющие моменты решений линейных стохастических систем с последействием, а также уравнения в частных производных для функций, входящих в эти равенства. Выделен класс систем, для которых соответствующие уравнения в частных производных интегрируются в явном аналитическом виде.

При изучении некоторых свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием могут оказаться полезными детерминированные выражения, определяющие вторые моменты решений. Ситуация здесь аналогична положению в уравнениях без запаздывания. Так, например, при исследовании различных вопросов устойчивости в среднеквадратическом решении линейных стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания могут быть использованы два подхода. Первый подход, предложенный в [1] и систематически разрабатывавшийся Р. З. Хасьминским (см. монографию [2]), основан на обобщении для стохастических систем второго метода Ляпунова. Второй подход [3] состоит в исследовании системы обыкновенных детерминированных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют вторые моменты решений исходных стохастических систем.

Ряд результатов, связанных с обобщением первого подхода на стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, получен в работах [4—6], где сформулированы некоторые теоремы об устойчивости в среднеквадратическом в терминах существования функционалов Ляпунова — Красовского, а также установлены условия устойчивости, формулируемые в терминах коэффициентов исходных уравнений, при помощи построения конкретных функционалов.

Ясно также, что для возможности применять к системам с запаздыванием второй подход, необходимо прежде всего получить детерминированные выражения, определяющие вторые моменты решений. В данной заметке такие выражения будут приведены для линейных стохастических систем с запаздыванием. Рассмотрим вначале систему стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx(t) = [A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-h)]\,dt + \sigma(t)\,d\xi(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь вектор $x(t)$ принадлежит евклидову пространству E_n размерности n. Относительно коэффициентов системы (1), понимаемой в смысле Ито, постоянно предлагаются выполненными следующие ограничения. Заданные матрицы $A(t)$, $B(t)$, $\sigma(t)$ имеют кусочно-непрерывные элементы. Винеровский процесс $\xi(t) \in E_l$ нормирован условиями

$$M\xi(t) = \xi(0) = 0, \quad M\xi(t)\,\xi'(t) = tI,$$

где штрих — знак транспонирования, I — единичная матрица, M — знак математического ожидания. Наконец, постоянная $h \geqslant 0$.

Решение $x(t)$ уравнения (1) при $t \geqslant 0$ определяется начальным условием

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{2}$$

где $\varphi(\tau)$ — заданный процесс с кусочно-непрерывными реализациями, конечными вторыми моментами, независимый от $\xi(t)$, $t \geqslant 0$.

Пусть H — заданная неотрицательно определенная матрица. Цель этого параграфа — установить выражения для величины

$$J = Mx'(T)\,Hx(T), \tag{3}$$

где штрих — знак транспонирования, а $T \geqslant 0$ — произвольный фиксированный момент времени. Используя метод динамического программирования в терминах существования функционалов Ляпунова — Красовского от траекторий системы (1), модифицированный для стохастических систем с запаздыванием в [7, 8], и результаты работ [7, 8], можно показать, что

$$J = M\Bigg[\varphi'(0)\,P(0)\,\varphi(0) + \varphi'(0)\int_{-h}^{0} Q(0,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{-h}^{0}\varphi'(\tau)\,Q'(0,\tau)\,d\tau\,\varphi(0) + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\varphi'(\tau)\,R(0,\tau,\rho)\,\varphi(\rho)\,d\tau\,d\rho\Bigg] + \alpha(0). \tag{4}$$

Детерминированные квадратные матрицы $P(t)$, $Q(t,\tau)$, $R(t,\tau,\rho)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $-h \leqslant \tau$, $\rho \leqslant 0$, размером $n \times n$ определяются как решение системы линейных уравнений

$$\dot P(t) + A'(t)\,P(t) + P(t)\,A(t) + Q(t,0) + Q'(t,0) = 0,$$

$$A'(t)\,Q(t,\tau) + R(t,0,\tau) + \frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial \tau} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R(t,\tau,\rho) - \frac{\partial}{\partial \tau}R(t,\tau,\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho}R(t,\tau,\rho) = 0, \quad -h \leqslant \tau, \quad \rho \leqslant 0, \tag{5}$$

с граничными условиями

$$P(T)=H,\quad Q(T,\tau)=R(T,\tau,\rho)=0,\quad -h<\tau,\quad \rho\leqslant 0,$$
$$B'(t)P(t)-Q'(t,-h)=0,$$
$$2B'(t)Q(t,\tau)-R(t,-h,\tau)-R'(t,\tau,-h)=0. \tag{6}$$

При этом из сделанных предположений о коэффициентах (1) и результатов [7, 8] вытекает существование и единственность решений краевой задачи (5), (6). Скалярная функция $\alpha(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, определяется формулой

$$\alpha(t)=\int_t^T TrP(s)\sigma(s)\sigma'(s)\,ds,$$

где TrP — след матрицы P.

Таким образом, в силу (4) для определения величины J достаточно вычислить матрицы P, Q, R, так как, например,

$$M\varphi'(0)P(0)\varphi(0)=\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}(0)M\varphi_i(0)\varphi_j(0),$$

где p_{ij} — ij-элемент матрицы P и φ_i — i-компонента вектора φ. Построим решение краевой задачи (5), (6). Не останавливаясь на методе решения краевой задачи (5), (6), сформулируем ответ.

Положим

$$z(t)=\exp\int_0^t A(s)\,ds.$$

Матрицу $B_1(t)$ определим формулой

$$\dot{B}_1(t)=-B_1(t+h)z(t+h)^{-1}B(t+h)z(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$B_1(T)=I,\quad B_1(s)\equiv 0,\quad s>T. \tag{7}$$

Тогда

$$P(t)=z'(t)^{-1}B_1'(t)z'(T)Hz(t)B_1(t)z(t)^{-1},$$

$$Q(t,\tau)=-z'(t)^{-1}B_1'(t)z'(T)Hz(T)\dot{B}_1(t+\tau)z(t+\tau)^{-1},$$

$$R(t,\tau,\rho)=z'(t+\tau)^{-1}\dot{B}_1'(t+\tau)z'(T)Hz(T)\dot{B}_1(t+\rho)z(t+\rho)^{-1}.$$

При этом ясно, что матрица $B_1(t)$, определяющая P, Q, R, ввиду (7) легко интегрируется в явном аналитическом виде.

З а м е ч а н и е 1. Аналогичным образом можно получить уравнения для вторых моментов и для стохастических систем вида

$$dx(t)=[A(t)x(t)+B(t)x(t-h)]\,dt+\sigma(t)x(t)\,d\xi(t),\quad t\geqslant 0, \tag{8}$$

где матрицы A, B, σ подчинены тем же ограничениям, что и выше, $\xi(t)$ — скалярный винеровский процесс, начальное условие задается (2). Определим матрицы $P_1(t)$, $Q_1(t,\tau)$, $R_1(t,\tau,\rho)$ как решение задачи (5), (6) с той лишь разницей, что вместо первого из уравнений системы (5) имеет место следующее:

$$\dot{P}_1(t)+A'(t)P_1(t)+P_1(t)A(t)+Q_1(t,0)+Q_1'(t,0)+\sigma'(t)P_1(t)\sigma(t)=0.$$

Тогда

$$Mx'(T)Hx(T)=M\Bigg[\varphi'(0)P_1(0)\varphi(0)+\varphi'(0)\int_{-h}^{0}Q_1(0,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau+$$
$$+\int_{-h}^{0}\varphi'(\tau)Q_1'(0,\tau)\,d\tau\varphi(0)+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\varphi'(\tau)R_1(0,\tau,\rho)\varphi(\rho)\,d\tau d\rho\Bigg]. \tag{9}$$

Замечание 2. При $h = 0$ соотношения (4), (9) переходят в формулы, определяющие вторые моменты решений стохастических систем без запаздывания [3, 2].

Замечание 3. Аналогично (4), (9), используя результаты [7, 8], можно получить выражения для вторых моментов решений стохастических систем, содержащих как несколько дискретных, так и распределенное запаздывание.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, Об устойчивости систем со случайными параметрами, ПММ, т. 24, № 5, 1960.
2. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, «Наука», М., 1969.
3. И. И. Гихман, Дифференциальные уравнения со случайными функциями, Сб. Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике, Изд-во АН УССР, К., 1964.
4. H. J. Kushner, On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations, J. diff. equations, 4, 3, 1968.
5. В. Б. Колмановский, Об устойчивости стохастических систем с запаздыванием, Проблемы передачи информации, т. 5, № 4, 1969.
6. В. Б. Колмановский, Об устойчивости некоторых стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 2, 1970.
7. В. Б. Колмановский, Т. Л. Майзенберг, Синтез оптимальных процессов с последействием, Материалы первой конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством (секция математических проблем), М., 1971.
8. В. Б. Колмановский, Т. Л. Майзенберг, Оптимальное управление стохастическими системами с последействием, Автоматика и телемеханика, № 1, 1973.

Поступила 23.XI 1972 г.

Институт проблем механики АН СССР