УДК 517.512.6/518.6.61

Об одной нелинейной граничной задаче колебаний весомой нити

К. Я. Кухта, В. П. Кравченко

Рассмотрим граничную задачу поперечных колебаний весомой нити, жестко закрепленной по концам, которая в невозмущенном состоянии занимает некоторое положение $y = \varphi(x)$. С учетом больших поперечных отклонений эта задача сводится к интегрированию следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x, t)\frac{\varphi' + u'}{\sqrt{1 + (\varphi' + u')^2}}\right] = \rho\sqrt{1 + \varphi'^2}\left(g - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ — смещение точек нити по оси $0y$, $T(x, t)$ — сила натяжения нити.

Определяя функцию $T(x, t)$ в виде

$$T(x, t) = T_0 + \varepsilon \cdot Es,$$

где E — модуль упругости, s — площадь сечения, T_0 — первоначальное натяжение в нити в невозмущенном состоянии, когда $y = \varphi(x)$, ε — относительное удлинение, равное

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + (\varphi' + u')^2}}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} - 1,$$

и заменяя в уравнении (1) радикал двумя членами степенного ряда, получим такое нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает поперечные колебания упругой весомой нити, которая в недеформированном состоянии занимает положение $y = \varphi(x)$:

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+d(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+e(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+h(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где

$$a(x)=\frac{1}{\rho\sqrt{1+\varphi'^2}}\left[R-\frac{3}{2}R\varphi'^2+\frac{Es}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right],$$

$$b(x)=-\frac{1}{\rho\sqrt{1+\varphi'^2}}\left[3R\varphi'\cdot\varphi''+\frac{Es\cdot\varphi'\cdot\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{3/2}}\right],$$

$$c(x)=-\frac{3R\varphi'}{\rho\sqrt{1+\varphi'^2}},\quad d(x)=-\frac{3R}{2\rho\sqrt{1+\varphi'^2}},$$

$$e(x)=-\frac{3R\varphi''}{2\rho\sqrt{1+\varphi'^2}},$$

$$h(x)=\frac{1}{\rho\sqrt{1+\varphi'^2}}\left[R\varphi''-\frac{3R\varphi''\cdot\varphi'^2}{2}+\frac{Es\cdot\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}-\rho g\sqrt{1+\varphi'^2}\right],$$

$$R=T_0-Es.$$

Как известно, решение нелинейных уравнений требует предварительного нахождения собственных функций и собственных частот. Поэтому сначала рассмотрим линейное уравнение:

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

с такими граничными условиями

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0. \tag{4}$$

Начальные условия при $t=0$ возьмем в виде

$$u(x,0)=\psi(x),\quad \dot{u}(x,0)=0. \tag{5}$$

Ищем решение уравнения (3) в виде

$$u(x,t)=X(x)\,T(t).$$

Разделяя переменные, приходим к задаче отыскания собственных чисел λ и собственных функций $X(x)$:

$$a(x)X''+b(x)X'+\lambda X=0, \tag{6}$$

$$X(0)=X(l)=0. \tag{7}$$

Дифференциальный оператор в уравнении (16) будет симметричным, поэтому собственные значения будут действительными. Эту задачу решаем методом нормальных фундаментальных систем [1]. Вводя новые функции $X=X_1$, $X'=X_2$, приходим к системе уравнений:

$$X_1'=X_2,\quad X_2'=-\frac{b(x)}{a(x)}X_2-\frac{\lambda}{a(x)}X_1, \tag{8}$$

$$X_1(0)=X_1(l)=0. \tag{9}$$

Применяя метод нормальных фундаментальных систем, для определения собственных чисел λ получаем уравнение:

$$\Delta(\lambda)=\varphi_{1.1}^{(n)}(l,\lambda)\,u_{1.2}^{(n)}+\varphi_{2.1}^{(n)}(l,\lambda)\,u_{2.2}^{(n)}=0, \tag{10}$$

корни которого и будут собственными числами задачи (8), (9). Соответствующие этим собственным числам собственные функции определяются формулой:

$$X_k^{(i)}(x, \lambda_k) = \varphi_{1,1}^{(i)}(x, \lambda_k)\, u_{1,2}^{(i)} + \varphi_{2,1}^{(i)}(x, \lambda_k)\, u_{2,2}^{(i)} \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i;$$
$$i = 1, \ldots, n; \quad x_0 = 0, \; x_n = l). \tag{11}$$

В выражениях (10) и (11) $\varphi_{1,1}^{(i)}(x, \lambda)$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x, \lambda)$ — решение системы (8) при начальных условиях $\varphi_{1,1}^{(i)}(x_{i-1}, \lambda) = 1$, $\varphi_{1,2}^{(i)}(x_{i-1}, \lambda) = 0$, $\varphi_{2,1}^{(i)}(x_{i-1}, \lambda) = 0$, $\varphi_{2,2}^{(i)}(x_{i-1}, \lambda) = 1$, а коэффициенты $u_{1,2}^{(i)}$ и $u_{2,2}^{(i)}$ находятся по рекуррентным формулам

$$u_{1,2}^{(i+1)} = \varphi_{1,1}^{(i)}(x_i, \lambda)\, u_{1,2}^{(i)} + \varphi_{2,1}^{(i)}(x_i, \lambda)\, u_{2,2}^{(i)}, \quad u_{2,2}^{(i+1)} = \varphi_{1,2}^{(i)}(x_i, \lambda) u_{1,2}^{(i)} + \varphi_{2,2}^{(i)}(x_i, \lambda)\, u_{2,2}^{(i)},$$

причем $u_{1,2}^{(1)} = 0$, $u_{2,2}^{(1)} = 1$.

Запишем решение уравнения (3) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, T_k(t).$$

Для функции $T(t)$ имеем следующее уравнение: $T'' + \lambda T = 0$, решение которого имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t.$$

Из начальных условий (5) можно найти, что

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)\, X_k(x)\, dx}{\int\limits_0^l X_k^2(x)\, dx}, \quad B_k = 0,$$

тогда решение граничной задачи (3) — (5) запишется в следующем виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^l \psi(x)\, X_k(x)\, dx}{\int\limits_0^l X_k^2(x)\, dx} X_k(x) \cos \sqrt{\lambda_k} t.$$

С помощью асимптотических методов Боголюбова — Митропольского [2, 3], используя принцип одночастотности, было получено первое приближение решения нелинейной граничной задачи (2), (4), (5) в виде

$$u(x, t) = a X_1(x) \cos \varphi,$$

где

$$a = a_0 = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)\, X_1(x)\, dx}{\int\limits_0^l X_1^2(x)\, dx},$$

$$\varphi = \left[p_1 + \frac{9a^2 (Es - T_0)}{16 \rho p_1 \int\limits_0^l X_1^2(x)\, dx} \int\limits_0^l \frac{X_1(x)}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} \frac{d^2 X_1}{dx} \left(\frac{dX_1}{dx} \right)^2 dx \right] t.$$

Здесь $\sqrt{\lambda_1} = p_1$ — найденная выше первая собственная частота поперечных колебаний весомой нити, а $X_1(x)$ — соответствующая ей собственная форма поперечных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Я. Кухта, В. П. Кравченко, Нормальные фундаментальные системы в задачах теории колебаний, «Наукова думка», К., 1973.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. Ю. А. Митропольский, Проблема асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.

Поступила 1.VII 1974 г.

Институт геотехнической механики АН УССР