УДК 517.9.004.1

Применение одного интегрального преобразования для решения задачи дифракции волн Коши—Пуассона

М. А. Харитонова

В данной работе рассматривается вопрос существования одного интегрального преобразования, связанного с функциями Бесселя. С помощью этого преобразования получено решение задачи дифракции волн Коши—Пуассона на полуплоскости с учетом конечной глубины жидкости. Аналогичную задачу для бесконечно глубокой жидкости рассмотрел Л. Н. Сретенский [1], который использовал методы Зоммерфельда в теории дифракции световых волн.

1. Пусть E_n обозначает n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\omega_n = \dfrac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ — площадь поверхности единичной сферы в этом пространстве, а $[\nu]$ есть расстояние от нуля до ближайшего ν целого числа, причем $\left[k + \frac{1}{2}\right] = k + 1$. Обозначим еще через $P_\nu(s)$ «нормированную» функцию Бесселя $P_\nu(s) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) s^{-\nu} I_\nu(s)$. Пусть далее среднее функции $f(x)$ по сфере радиуса λ с центром в точке ξ $\Phi(\xi, \lambda) = \dfrac{1}{\omega_n} \int\limits_{\|\eta\|=1} f(\xi + \lambda\eta)\, d\eta$ является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, \infty)$ по λ $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ раза, а каждая из функций

$$g(\lambda, \xi) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \Phi(\xi, \lambda),\ \frac{\partial g}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} g}{\partial \lambda^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}}$$

имеет абсолютно интегрируемую на $(0, \infty)$ производную.

При этих обозначениях и предположениях С. Бохнер [2] установил справедливость следующих формул:

$$S_f(\lambda, \xi) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int\limits_{E_n} f(x) P_{\frac{n-2}{2}}(\lambda \| x - \xi \|)\, dx,\quad f(\xi) = \int\limits_0^\infty \lambda^{n-1} S_f(\lambda, \xi)\, d\lambda. \tag{1.1}$$

Очевидно формулы (1.1) определяют интегральное преобразование, которое будем называть преобразованием С. Бохнера.

Преобразование С. Бохнера обобщил А. Ф. Шестопал и анонсировал его в автореферате докторской диссертации [3]. А. Ф. Шестопал получил следующее интегральное преобразование:

$$\widetilde{S}_f(\lambda, \xi) = \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int\limits_{E_n} f(x) \int\limits_{-\infty}^{q(x,\xi)} P_{\frac{n-1}{2}}\left(\lambda \sqrt{\| x - \xi \|^2 + v^2}\right) dv\, dx,$$

$$f(\xi) = \int\limits_0^\infty \lambda^n \widetilde{S}_f(\lambda, \xi)\, d\lambda, \tag{1.2}$$

которое справедливо при достаточно широких ограничениях на функцию $q(x, \xi)$ и при $q = \infty$ совпадает с преобразованием С. Бохнера.

Оказывается, что $\widetilde{S}$-преобразование, так же как и преобразование С. Бохнера, при надлежащем выборе функции $q(x, \xi)$ обладает следующим свойством:

$$\widetilde{S}_{\Delta_n f(x)}(\lambda, \xi) = -\lambda^2 \widetilde{S}_{f(x)}(\lambda, \xi), \tag{1.3}$$

где $\Delta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\quad x = x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

При этом функция $q(x, \xi)$ должна удовлетворять переопределенной системе уравнений

$$q = 2(x - \xi, \operatorname{grad} q) + q \| \operatorname{grad} q \|^2, \tag{1.4}$$
$$\Delta_n q = 0.$$

Покажем, что система (1.4) имеет действительные решения только тогда, когда размерность пространства $n = 2$. Умножим первое уравнение системы (1.4) на q и положим $q^2 = u$, $x - \xi = \bar{x}$. Тогда система (1.4) преобразуется к виду

$$u = (\bar{x}, \operatorname{grad} u) + \frac{1}{4} \| \operatorname{grad} u \|^2, \tag{1.5}$$

$$2u\Delta_n u = \| \operatorname{grad} u \|^2.$$

Первое уравнение системы (1.5) есть уравнение Клеро, и его решение находится из системы

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i t_i + x_n \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) + \Phi, \tag{1.6}$$

$$0 = \bar{x}_i + \bar{x}_n \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1.7}$$

где $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$, вообще говоря, произвольная функция параметров t_i, а $\Phi = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} + \varphi^2\right)$. Из уравнений (1.6) и (1.7) получим

$$u = -\left(\bar{x}_n + \frac{\varphi}{2}\right) \sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} - \Phi, \tag{1.8}$$

$$\Delta_n u = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial t_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \frac{\partial t_i}{\partial x_n}.$$

Дифференцируя каждое из уравнений (1.7) по всем x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим n систем линейных уравнений с $n-1$ неизвестным, из которых можно определить $\frac{\partial t_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Все n систем имеют общий определитель Δ, элемент a_{ij} которого имеет вид

$$a_{ij} = \left(\bar{x}_n + \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} + \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.9}$$

Тогда $\frac{\partial t_i}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\Delta_{ii}}{\Delta}$, где Δ_{ii} — алгебраическое дополнение элемента a_{ii}, а

$$\frac{\partial t_i}{\partial \bar{x}_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}}{\Delta}. \tag{1.10}$$

На основании формул (1.8) и (1.10) второе уравнение системы (1.5) можно записать так:

$$\left[\left(\bar{x}_n+\frac{\varphi}{2}\right)\sum_{i=1}^{n-1} t_i\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}+\Phi\right]\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{ii}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right]=2\Phi\Delta. \tag{1.11}$$

Выражения слева и справа в равенстве (1.11) есть полиномы степени $n-1$ относительно $\left(\bar{x}_n+\frac{\varphi}{2}\right)$, и для определения $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ достаточно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\left(\bar{x}_n+\frac{\varphi}{2}\right)$.

Раскладывая Δ по i-й строке и затем суммируя по всем i, получим тождество

$$\Delta\equiv\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(\bar{x}_n+\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_i\partial t_j}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}+\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\right]\Delta_{ij}(-1)^{i+j}. \tag{1.12}$$

Из равенства (1.11) и тождества (1.12) следует

$$(n-2)\,\Phi\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Delta_{ii}+\sum_{i=1}^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right]=0. \tag{1.13}$$

Используя простейшие свойства определителей, нетрудно показать, что свободный член Δ с точностью до коэффициента $\frac{1}{n-1}$ совпадает со свободным членом выражения в квадратных скобках равенства (1.13).

Следовательно,

$$(n-2)\,\Phi\Delta_{\text{св.ч}}=0, \tag{1.14}$$

откуда для всех $n\neq 2$

$$\Phi=0 \tag{1.15}$$

или $\Delta_{\text{св.ч}}=0$. Свободный член полинома Δ можно представить в виде

$$\Delta_{\text{св.ч}}=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\right)^2+1 & \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_1} & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)^2+1 & \ldots & \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t_2} & \ldots & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right)^2+1\end{vmatrix}=$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right)^2. \tag{1.16}$$

Пусть теперь $\Phi=0$. Тогда $\varphi=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} t_i^2}$, и система (1.7) принимает вид

$$t_1^2\left(1\mp\frac{\bar{x}_n^2}{\bar{x}_1^2}\right)+t_2^2+\ldots+t_{n-1}^2=0,$$

$$t_1^2 + t_2^2\left(1 \mp \frac{\bar{x}_n^2}{\bar{x}_2^2}\right) + \ldots + t_{n-1}^2 = 0, \tag{1.17}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{n-1}^2\left(1 \mp \frac{\bar{x}_n^2}{\bar{x}_{n-1}^2}\right) = 0.$$

Очевидно, что все $t_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, и решения системы (1.5) не существует.

Рассмотрим случай, когда $\Delta_{\text{св.ч}} = 0$ или, что то же самое,

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\right)^2 = 0. \tag{1.18}$$

Последнее уравнение есть уравнение Клеро. Его общее решение имеет вид

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i t_i + i t_{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} c_i^2 + 1} + \psi(c_1 c_2, \ldots, c_{n-2}). \tag{1.19}$$

В этом случае система (1.7) записывается следующим образом:

$$(1 + c_1^2)\,t_1 + c_1 c_2 t_2 + \ldots + i c_1\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} c_1^2 + 1}\,t_{n-1} = -2\left[\bar{x}_1 + c_1\left(\bar{x}_n + \frac{\psi}{2}\right)\right],$$

$$c_1 c_2 t_1 + (1 + c_2^2)\,t_2 + \ldots + i c_2\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} c_1^2 + 1}\,t_{n-1} = -2\left[\bar{x}_2 + c_2\left(\bar{x}_n + \frac{\psi}{2}\right)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.20}$$

$$i c_1\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} c_i^2 + 1}\,t_1 + i c_2\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} c_i^2 + 1} + \ldots + \left(-\sum_{i=1}^{n-2} c_i^2\right) t_{n-1} =$$

$$= -2\left(\bar{x}_{n-1} + c_{n-1}\bar{x}_n + i\,\frac{\psi}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} c_i^2 + 1}\right).$$

Легко показать, что ее определитель $\Delta = 0$, т. е. система (1.19) несовместна. Из этого следует, что и система (1.5) не имеет решения.

Если же $n = 2$, то существует решение системы (1.5) в виде двупараметрического семейства

$$q^2 = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)},$$

$$\eta_1 = x_1 - \xi_1 + \frac{c_1}{2}, \quad \eta_2 = x_2 - \xi_2 + \frac{c_2}{2}. \tag{1.21}$$

При соответствующем выборе констант c_1 и c_2 его можно представить в полярных координатах в виде

$$q = 2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi - \varphi_0}{2}. \tag{1.22}$$

Таким образом, показано, что для $\widetilde{S}$-преобразования справедливо условие (1.3) только тогда, когда размерность пространства $n = 2$.

2. Свойство (1.3) S-преобразования позволяет получить решение задачи дифракции волн Коши — Пуассона с учетом конечной глубины жидкости.

Допустим, что в жидкость конечной глубины погружена вертикально полуплоскость, край которой тоже вертикален и предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ в некоторой точке η поверхности образовалось начальное возвышение. Требуется определить вид поверхности жидкости в любой момент времени и найти тем самым закон распространения волн, огибающих твердую перегородку.

Пусть положение частицы жидкости определяется тремя пространственными координатами x, y, z, и жидкость имеет конечную глубину $z = h$. Решим вспомогательную задачу об определении функции $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.1}$$

и подчиняющейся в римановом слое $R_2 \times [0, h]$ краевым условиям

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \quad -g\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} = 0 \tag{2.2}$$

и начальным условиям при $z = 0$

$$\Phi|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = g\delta_\eta. \tag{2.3}$$

Для ее решения применим $\widetilde{S}$-преобразование к функции Φ по первым двум переменным

$$\widetilde{S}_\Phi(\lambda, \xi, z, t) = \frac{\omega_3}{(2\pi)^3}\int\limits_{E_2}\Phi(X, z, t)\int\limits_{-\infty}^{q(x,\xi)} P_{\frac{1}{2}}(\lambda\sqrt{\|X-\xi\|^2+v^2}dvdX, \tag{2.4}$$

где $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2)$, $X = X(x, y)$.

Перейдем от $X(x, y)$, $\xi(\xi_1, \xi_2)$, $\eta(\eta_1, \eta_2)$ к полярным координатам

$$x + iy = ae^{i\alpha}, \quad \xi_1 + i\xi_2 = re^{i\varphi}, \quad \eta_1 + i\eta_2 = \rho e^{i\varphi_0}.$$

Тогда формула (2.4) примет вид

$$\widetilde{S}_\Phi(\lambda, r, \varphi, z, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\Phi(a, \alpha, z, t)\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{ra}\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}}\frac{\sin(\lambda\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\varphi-\alpha)+v^2})}{\lambda\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\varphi-\alpha)+v^2}}dvdad\alpha.$$

Для $\widetilde{S}_\Phi$ сформулированная задача состоит в нахождении решения уравнения

$$\frac{\partial^2\widetilde{S}_\Phi}{\partial z^2} - \lambda^2\widetilde{S}_\Phi = 0, \tag{2.5}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$\left.\frac{\partial\widetilde{S}_\Phi}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \quad -g\left.\frac{\partial\widetilde{S}_\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial^2\widetilde{S}_\Phi}{\partial t^2}\right|_{z=0} = 0 \tag{2.6}$$

и начальным условиям при $z = 0$

$$\widetilde{S}_{\Phi}|_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \widetilde{S}_{\Phi}}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{g}{2\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \frac{\sin(\lambda\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+v^2})}{\lambda\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+v^2}}\,dv. \qquad (2.7)$$

Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\widetilde{S}_{\Phi}(\lambda, r, \varphi, z, t) = A(\lambda, r, \varphi, t)\, e^{-\lambda z} + B(\lambda, r, \varphi, t)\, e^{\lambda z}. \qquad (2.8)$$

Используя формулу (2.8), краевые условия (2.6) и начальные условия (2.7), находим

$$\widetilde{S}_{\Phi}(\lambda, r, \varphi, z, t) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda g \,\mathrm{th}\,\lambda h}\,t)\,\frac{\mathrm{ch}\,\lambda(z-h)}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,2\lambda h}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \frac{\sin(\lambda\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+v^2})}{\lambda\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+v^2}}\,dv. \qquad (2.9)$$

Применив к полученной функции $\widetilde{S}_{\Phi}$ обратное $\widetilde{S}$-преобразование, найдем

$$\Phi(r, \varphi, z, t) = \int\limits_0^{\infty} \lambda^2 \widetilde{S}_{\Phi}(\lambda, r, \varphi, z, t)\, d\lambda. \qquad (2.10)$$

Искомое решение основной задачи представляет, очевидно, функция

$$\hat{\Phi}(r, \varphi, z, t) = \Phi(r, \varphi, z, t) + \Phi(r, -\varphi, z, t). \qquad (2.11)$$

Ее производная $\left.\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0$. В случае, когда $h = \infty$, формула (2.11) имеет вид

$$\hat{\Phi}(r, \varphi, z, t) = \int\limits_0^{\infty} \lambda^2 [\widetilde{S}_{\Phi}(\lambda, r, \varphi, z, t) + \widetilde{S}_{\Phi}(\lambda, r, -\varphi, z, t)]\, d\lambda, \qquad (2.12)$$

где

$$\widetilde{S}_{\Phi}(\lambda, r, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda g}\,t e^{-\lambda z} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \frac{\sin(\lambda\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+v^2})}{\lambda\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+v^2}}\,dv.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. **Сретенский**, Дифракция волн в задаче Коши — Пуассона, ДАН СССР, т. 129, № 1, 1959.
2. С. **Бохнер**, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962.
3. А. Ф. **Шестопал**, Метод разложений по фундаментальным решениям в применении к задачам математической физики, Автореферат докт. дисс., Ин-т математики АН УССР, К., 1969.

Поступила 26.VI 1973 г.,
после переработки — 9.IV 1974 г.

Институт математики АН УССР