УДК 517.54

Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях

Г. П. Бахтина

Пусть $\mathfrak{M} = \{(f_1, f_2)\}$ — множество всевозможных пар функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и однолистно отображающих его на неналегающие друг на друга области B_1, B_2 так, что $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2$, где a_1, a_2 — любые заданные конечные и различные между собой точки. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cup \{(f_1, a_2)\} \cup \{(a_1, f_2)\} \cup (a_1, a_2)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — регулярные и однолистные в круге $|z| < 1$ функции такие, что $f_1(z) \neq a_2$, $f_2(z) \neq a_1$ при всех $z \in |z| < 1$ и $f_k(0) = a_k$, $k = 1, 2$ (a_1, a_2 — точки, указанные в определении множества $\mathfrak{M}$).

В работе вариационным методом Г. М. Голузина [1, 2] решаются две задачи на относительный экстремум.

1. Пусть $b > 0$. Через $\mathfrak{F}_b$ обозначим класс всех пар $(f_1, f_2) \in \mathfrak{F}$ функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, удовлетворяющих условию $|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \geqslant b$. Исследуем задачу о максимуме функционала $J = |f_1'(0)| + |f_2'(0)|$ на классе $\mathfrak{F}_b$ при различных $b > 0$.

Существование пары экстремальных функций следует из ограниченности функционала J и компактности в себе класса $\mathfrak{F}_b$. Пусть (f_1, f_2) — пара экстремальных функций $w = f_k(z)$, $k = 1, 2$. B_1, B_2 — соответствующие экстремальные области. При помощи формулы

$$f_k^*(z) = f_k(z) + h \sum_{n=1}^{2} A_n \frac{\prod_{\nu=1}^{2} (f_k(z) - a_\nu)}{f_k(z) - w_n}, \quad w_n \bar{\in} B_k \ (n = 1, 2; \ k = 1, 2),$$

доказывается, что области B_1 и B_2 покрывают всю плоскость w, т. е. нет точек, внешних одновременно для обеих областей B_1 и B_2. Пользуясь вариационными формулами Г. М. Голузина (см. [1, формула (6)]) и его леммой [2], найдем следующие дифференциальные уравнения для экстремальных функций (ср. с [3]):

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 - w} + \lambda \frac{a_2 - a_1}{a_2 - w} + \frac{(w - a_1)(w - a_2)}{z^2 w'^2} = 0 \quad (w = f_1(z)), \tag{1}$$

$$\mu \frac{a_1 - a_2}{a_1 - w} + \frac{a_2 - a_1}{a_2 - w} + \frac{(w - a_1)(w - a_2)}{z^2 w'^2} = 0 \quad (w = f_2(z)), \tag{2}$$

где λ и μ зависят от $|f_1'(0)|$ и $|f_2'(0)|$, и $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$, $0 < \lambda < \infty$. Проинтегрировав эти уравнения и определив произвольные постоянные, найдем $f_1'(0)$ и $f_2'(0)$ и вычислим функционал:

$$J(\lambda) = \frac{4}{|1-\lambda|}\left[\left|\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right|^{\sqrt{\lambda}} + \lambda\left|\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right|^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right]|a_1-a_2|,$$

где λ удовлетворяет условию

$$\frac{4^2}{|1-\lambda|^2}\lambda\left|\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right|^{\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}|a_1-a_2|^2 \geqslant b. \tag{3}$$

Исследуя неравенство (3) и поведение функционала в зависимости от изменения параметра λ при $0<\lambda<1$ и $1<\lambda<\infty$, получаем, что:

1) при $b>|a_1-a_2|^2$ класс $\mathfrak{F}_b$ пуст;

2) при $b=|a_1-a_2|^2$ максимум функционала $J=|f_1'(0)|+|f_2'(0)|$ на классе $\mathfrak{F}_b$ равен $2|a_1-a_2|$. А экстремальными являются функции, отображающие круг $|z|<1$ на полуплоскости, относительно общей границы которых точки a_1 и a_2 симметричны. Отсюда легко получается известный результат М. А. Лаврентьева [4] о максимуме произведения $|f_1'(0)|\cdot|f_2'(0)|$ на множестве $\mathfrak{M}$;

3) при $b<|a_1-a_2|^2$ доказывается, что максимум функционала J на классе $\mathfrak{F}_b$ равен

$$J_0=\left[\frac{4}{1-\lambda_0}\left(\frac{1-\sqrt{\lambda_0}}{1+\sqrt{\lambda_0}}\right)^{\sqrt{\lambda_0}} + \frac{4}{\lambda_1-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda_1}-1}{\sqrt{\lambda_1}+1}\right)^{\sqrt{\lambda_1}}\right]|a_1-a_2|,$$

где λ_0 есть единственный корень уравнения

$$\frac{4^2}{|1-\lambda|^2}\lambda\left|\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right|^{\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = b$$

в интервале $(0,1)$, λ_1 — единственный корень этого же уравнения в интервале $(1,\infty)$ и $\lambda_1=\dfrac{1}{\lambda_0}$.

Экстремальными являются две пары функций, которые при $\lambda=\lambda_0$ и $\lambda=\lambda_1$ определяются следующими неявными уравнениями, полученными интегрированием дифференциальных уравнений (1) и (2):

$$\frac{e^{i\alpha_1}}{z}=\frac{\sqrt{w^*}+\sqrt{a}}{\sqrt{w^*}-\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{w^*}-\sqrt{a\lambda}}{\sqrt{w^*}+\sqrt{a\lambda}}\right)^{\sqrt{\lambda}},$$

где $w^*=(f_1(z)-a_2)(1-\lambda)+\lambda(a_1-a_2)$, $a=a_1-a_2$, α_1 — вещественное;

$$\frac{e^{i\alpha_2}}{z}=\frac{\sqrt{w^{**}}+\sqrt{a}}{\sqrt{w^{**}}-\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{w^{**}}-\sqrt{a\mu}}{\sqrt{w^{**}}+\sqrt{a\mu}}\right)^{\sqrt{\mu}}, \quad \mu=\frac{1}{\lambda},$$

где $w^{**}=(\mu-1)(f_2(z)-a_2)+(a_1-a_2)$, α_2 — вещественное. Под $\sqrt{w^*}$ и $\sqrt{w^{**}}$ понимаем те ветви функций, для которых при $z=0$ выражения $\sqrt{w^*}-\sqrt{a}$ и $\sqrt{w^{**}}-\sqrt{a}$ равны нулю.

В каждой экстремальной паре одна из функций отображает круг $|z|<1$ на ограниченную область, а другая — на неограниченную. Ограниченная область имеет аналитическую $\left(\text{за исключением точки } w' = \frac{a_2 - a_1\lambda_0}{1-\lambda_0}\right.$ для одной экстремальной пары и точки $w'' = \frac{a_2 - a_1\lambda_1}{1-\lambda_1}$ для другой экстремальной пары$\left.\right)$ границу, которая симметрична относительно прямой l, проходящей через точки a_1 и a_2. Неограниченная область является дополнением ограниченной области до всей плоскости и имеет разрез по прямой l от точки w' до бесконечности или от точки w'' до бесконечности в зависимости от того, какую экстремальную пару мы рассматриваем.

2. Пусть $c > 0$. Через $\mathfrak{F}_c$ обозначим класс всех пар $(f_1, f_2) \in \mathfrak{F}$ функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, удовлетворяющих условию $|f_1'(0)| + |f_2'(0)| \geqslant c$. Исследуем задачу о максимуме функционала $I = |f_1'(0)|\,|f_2'(0)|$ на классе $\mathfrak{F}_c$ при различных $c > 0$.

Метод и этапы решения этой задачи те же, что в задаче 1, поэтому приведем только конечный результат:

1) при $c > 4|a_1 - a_2|$ класс $\mathfrak{F}_c$ пуст;

2) при $c = 4|a_1 - a_2|$ класс $\mathfrak{F}_c$ состоит из двух пар (f_1, a_2), (a_1, f_2) функций $w = f_1(z)$, $w = a_2 = \text{const}$ и $w = a_1 = \text{const}$, $w = f_2(z)$, где функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярны в круге $|z| < 1$ и однолистно отображают его на плоскость с разрезом, идущим соответственно от точек a_2 и a_1 до бесконечности вдоль прямой, проходящей через точки a_1 и a_2. В этом случае $I = 0$;

3) при $c \leqslant 2|a_1 - a_2|$ максимум функционала $I = |f_1'(0)|\,|f_2'(0)|$ на классе $\mathfrak{F}_c$ равен $|a_1 - a_2|^2$, и области B_1 и B_2 являются полуплоскостями. Этот случай соответствует задаче на абсолютный экстремум [4];

4) при $2|a_1 - a_2| < c < 4|a_1 - a_2|$ максимум функционала I на классе $\mathfrak{F}_c$ равен

$$I_0 = \frac{4^2}{1-\lambda_2}\lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_2}}\right)^{\sqrt{\lambda_2}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}}|a_1 - a_2|^2,$$

где λ_2 есть единственный корень уравнения

$$\frac{4}{1-\lambda}\left[\left(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right)^{\sqrt{\lambda}} + \lambda\left(\frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right]|a_1 - a_2| = c$$

в интервале (0, 1). Экстремальными являются две пары функций. В каждой из этих пар одна из функций отображает круг на ограниченную область, а другая — на неограниченную.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин, Метод вариаций в конформном отображении. III, Матем. сб., т. 21 (63), № 1, 1947.
2. Г. М Голузин, Метод вариаций в конформном отображении. IV, Матем. сб., т. 29 (71), № 2, 1951.
3. Л. И. Колбина, Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении, ДАН СССР, т. 84, № 5, 1952.
4. М. А. Лаврентьев, К теории конформных отображений, Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 5, 1934.

Поступила 26.II 1974 г.

Институт математики АН УССР