УДК 517.512+517.521

Условия равносильности методов Чезаро методу Абеля—Пуассона суммирования неограниченных последовательностей

Н. А. Давыдов

1. Данная статья является продолжением работы [1]. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с комплексными членами a_n и частными суммами

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Обозначим

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $\alpha > -1$, S_n^α и A_n^α определяются из разложений

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^\alpha x^n$$

при условии, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится для $|x| < 1$. Числа σ_n^α $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называются средними Чезаро порядка α для последовательности (2) (ряда (1)). Известно [2, стр. 129—131], что

$$\sigma_n^\alpha = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1} \sigma_k^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_k}{A_n^\alpha} \text{ и}$$

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

Известно также [3, стр. 140], что из равенства

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^\alpha = S \tag{5}$$

следует равенство

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = S. \tag{6}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

В данной работе укажем достаточное условие для того, чтобы из (6) следовало (5). Это позволит сформулировать одну общую теорему тауберова типа для метода Абеля — Пуассона суммирования рядов (теорема 3).

2. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если*

$$\left|\sum_{i=0}^{k} A_{n_i}^{\alpha-1}\sigma_{n_i}^{\alpha-1}\right| \leqslant Cn_k^{\alpha} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{7}$$

где $\alpha>0$, C — *константа*, $\sigma_{n_i}^{\alpha-1}$ $(i=0,1,2,\ldots)$ — *все те члены действительной последовательности* $\{\sigma_n^{\alpha-1}\}$, *которые принадлежат промежутку* $(-\infty;\ -R]$ *при каком-нибудь* $R>0$, *то из* (6) *следует равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{\alpha+h}=S \tag{8}$$

при любом $h>0$. *В частности, из* (6) *следует равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{1+h}=S \tag{9}$$

при любом $h>0$, *если*

$$\left|\sum_{i=0}^{k} S_{n_i}\right| \leqslant Cn_k \quad (k=1,2,\ldots), \tag{10}$$

где C — *константа*, S_{n_i} $(i=0,1,2,\ldots)$ — *все те члены действительной последовательности* (2), *которые принадлежат промежутку* $(-\infty;\ -R]$ *при каком-нибудь* $R>0$.

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\{n_i\}$ — *возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел. Для справедливости равенства*

$$(1-x)^{\alpha}\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{n_i}=O(1) \quad (0\leqslant x<1), \tag{11}$$

где $\alpha>0$, $c_i\geqslant 0$ $(i=0,1,2,\ldots)$ *и ряд* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{n_i}$ *сходится для* $0\leqslant x<1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=0}^{k} c_i=O(n_k^{\alpha}). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть справедливо равенство (11). Тогда

$$O(1)=(1-x)^{\alpha}\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{n_i}\geqslant(1-x)^{\alpha}\sum_{i=0}^{k} {}_i x^{n_i}\geqslant(1-x)^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{k} c_i\right)x^{n_k},$$

откуда $\sum\limits_{i=0} c_i \leqslant \dfrac{O(1)}{(1-x)^{\alpha}x^{n_k}}$. Взяв $x=1-\dfrac{1}{n_k}$, получим

$$\sum_{i=0}^{k} c_i\leqslant\frac{O(1)}{\dfrac{1}{n_k^{\alpha}}\left(1-\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k}}=O(n_k^{\alpha}),$$

т. е. справедливо равенство (12).

Пусть справедливо равенство (12). Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{n_i}$ сходится для $0 \leqslant x < 1$. Определим последовательность $\{c'_n\}$ с помощью равенств: $c'_n = c_i$, если $n = n_i$ и $c'_n = 0$, если $n \neq n_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда неравенства $\sum_{i=0}^{k} c_i \leqslant C n_k^{\alpha}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ для $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ можно записать в виде $\sum_{i=0}^{n} c'_i \leqslant C n^{\alpha}$.

Обозначив $V'_n = \sum_{i=0}^{n} c'_i$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, имеем

$$(1-x)^{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{n_i} = (1-x)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} V'_n x^n \leqslant$$

$$\leqslant C\Gamma(\alpha+1)(1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} x^n \sim \Gamma(\alpha+1) C \ (x \to 1-0),$$

т. е. справедливо (11). Здесь мы воспользовались известной теоремой (см. [4, стр. 254, 255]). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$O(1) = (1-x)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha-1} \sigma_n^{\alpha-1} x^n =$$

$$= (1-x)^{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} A_{n_i}^{\alpha-1} \sigma_{n_i}^{\alpha-1} x^{n_i} + (1-x)^{\alpha} \sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1} \sigma_{m_i}^{\alpha-1} x^{m_i}, \tag{13}$$

где $\{m_i\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{n_i\}$.

По лемме 1 $(1-x)^{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} A_{n_i}^{\alpha-1} \sigma_{n_i}^{\alpha-1} x^{n_i} = O(1)$ $(0 \leqslant x < 1)$. Отсюда и из (13) получаем

$$(1-x)^{\alpha} \sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1} \sigma_{m_i}^{\alpha-1} x^{m_i} = O(1) \quad (0 \leqslant x < 1). \tag{14}$$

Для последовательности $S'_n = S_n + R$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеем

$$\sigma_{m_i}^{\prime\alpha-1} = \sigma_{m_i}^{\alpha-1} + R > 0. \tag{15}$$

Отсюда и из (14) получаем

$$O(1) = (1-x)^{\alpha} \sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1} (\sigma_{m_i}^{\prime\alpha-1} - R)\, x^{m_i} =$$

$$= (1-x)^{\alpha} \sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1} \sigma_{m_i}^{\prime\alpha-1} x^{m_i} - R(1-x)^{\alpha} \sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1} x^{m_i}. \tag{16}$$

Так как

$$0 \leqslant (1-x)^{\alpha} \sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1} x^{m_i} < (1-x)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha-1} x^n = 1 \quad (0 \leqslant x < 1),$$

то из (16) находим $(1-x)^{\alpha}\sum_{i} A_{m_i}^{\alpha-1}\sigma_{m_i}^{\prime\,\alpha-1}x^{m_i} = O(1)$ $(0 \leqslant x < 1)$. Если $\{m_i\}$ — бесконечная последовательность, то по лемме 1 получаем

$$\sum_{i=0}^{\nu} A_{m_i}^{\alpha-1}\sigma_{m_i}^{\prime\,\alpha-1} = O(m_\nu^{\alpha}). \tag{17}$$

Из (17) и (15) имеем $O(1) = \frac{1}{m_\nu^{\alpha}}\sum_{i=0}^{\nu} A_{m_i}^{\alpha-1}\sigma_{m_i}^{\alpha-1} + \frac{R}{m_\nu^{\alpha}}\sum_{i=0}^{\nu} A_{m_i}^{\alpha-1}$ и, следовательно, $\sum_{i=0}^{\nu} A_{m_i}^{\alpha-1}\sigma_{m_i}^{\alpha-1} = O(m_\nu^{\alpha})$. Последнее равенство вместе с неравенством (10) убеждает нас в том, что $\sigma_n^{\alpha} = O(1)$. Таким образом, из равенства $(1-x)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha-1}\sigma_n^{\alpha-1}x^n = O(1)$ $(0 \leqslant x < 1)$ и из неравенства (10) следует равенство $\sigma_n^{\alpha} = O(1)$. Отсюда и из (6) по теореме Харди и Литтльвуда [1, теорема A] следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{\alpha+1} = S$. Но тогда по известной теореме (см. [3, стр. 163]) справедливо равенство (8) при любом $h > 0$. Теорема 1 доказана.

3. Из (c)-свойства методов Чезаро суммирования рядов [5, теорема А] вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть каждый частичный предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности $\{S_{n_k}\}$* последовательности $\{S_n\}$ является (c)-точкой** последовательности $\{S_n\}$. Если последовательность $\{S_n\}$ суммируется к числу S каким-нибудь (c, α)-методом, то* $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$.

В самом деле, пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ ограничена. Действительно, если бы эта подпоследовательность была не ограничена, то бесконечно удаленная точка, будучи частичным пределом этой подпоследовательности, в силу условия теоремы, была бы (c)-точкой последовательности $\{S_n\}$. Но тогда по (c)-свойству методов Чезаро средние Чезаро любого порядка были бы не ограничены, что противоречит одному из условий теоремы 2.

Итак, $\{S_{n_k}\}$ — ограниченная подпоследовательность. Эта подпоследовательность в силу (c)-свойства методов Чезаро не может иметь двух различных частичных пределов, т. е. подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ сходится. По (c)-свойству методов Чезаро эта подпоследовательность сходится к числу S, к которому последовательность $\{S_n\}$ суммируется (c, α)-методом. Теорема 2 доказана.

Теорема 2, вообще говоря, не верна для последовательности $\{S_n\}$, суммируемой методом Абеля — Пуассона [6]. Однако при выполнении дополнительного условия, содержащегося в теореме 1 данной работы и в теоремах 1 и 2 работы [1], теорема 2 верна и для последовательности $\{S_n\}$, суммируемой методом Абеля — Пуассона, так как при выполнении такого дополнительного условия из суммируемости последовательности $\{S_n\}$ методом Абеля — Пуассона следует ее суммируемость (c, α)-методом при некотором α.

Сформулируем одну наиболее общую теорему такого рода.

---

* Подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ может, в частности, быть самой последовательностью $\{S_n\}$.

** Определение (c)-точки дано в работе [5, стр. 186].

Теорема 3. *Пусть для какого-нибудь $\alpha \geqslant 1$ и какого-нибудь $R > 0$ справедливы неравенства*

$$\left|\sum_{k=0}^{p} A_k^{\alpha-1}\sigma_k^{\alpha-1}(-R)\right| \leqslant Cp^{\alpha} \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

где

$$\sigma_k^{\alpha-1}(-R) = \begin{cases}\sigma_k^{\alpha-1}, & \text{если } \sigma_k^{\alpha-1} \leqslant -R, \\ 0, & \text{если } \sigma_k^{\alpha-1} > -R \ (k = 0, 1, 2, \ldots),\end{cases}$$

и пусть каждый частичный предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности $\{S_{n_k}\}$ является (c)-точкой последовательности (2). *Если последовательность* (2) *суммируется к числу S методом Абеля—Пуассона, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$.*

Справедливость этой теоремы вытекает из теорем 1 и 2 данной работы и теоремы 2 работы [1]. Заметим, что в теореме 2 (как и в теореме 3) важно, чтобы (c)-точками последовательности (2) были не только все конечные частичные пределы подпоследовательности $\{S_{n_k}\}$, но и чтобы бесконечная удаленная точка (если она является частичным пределом подпоследовательности $\{S_{n_k}\}$) также была (c)-точкой последовательности $\{S_n\}$. Справедливость этого замечания покажем на примере.

Рассмотрим последовательность

$$S_n = \begin{cases} -\dfrac{2^k}{k+1}, & \text{если } n = 2^k, \\[2mm] \dfrac{2^k}{k+1}, & \text{если } n = 2^k + 1, \\[2mm] 0, & \text{если } n \neq 2^k \text{ и } n \neq 2^k + 1 \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{19}$$

Для этой последовательности имеем:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2^k} = -\infty, \quad \lim_{k\to\infty} S_{2^k+1} = +\infty, \quad S_{m_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\{m_k\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus (\{2^k\} \cup \{2^k + 1\})$. По лемме 3 работы [1]

$$\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k} S_{2^i} \to 0 \ (k\to\infty), \qquad \frac{1}{2^k+1}\sum_{i=1}^{k} S_{2^i+1} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

откуда $\sigma_n = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k}{n+1} \to 0 \ (n\to\infty)$, т. е. последовательность (19) суммируется к числу нуль $(c, 1)$-методом. Каждый конечный частичный предел подпоследовательности $\{S_{n_k}\}$, где $\{n_k\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \setminus \{2^k\}$ (эта подпоследовательность имеет только один конечный частичный предел, равный нулю), является (c)-точкой последовательности (19). Однако подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ расходится. И расходится эта подпоследовательность потому, что плюс бесконечно удаленная точка, являющаяся для нее бесконечным частичным пределом, не является (c)-точкой последовательности (19). Если же взять подпоследовательность $\{S_{m_k}\}$, то каждый частичный предел этой подпоследовательности (эта подпоследовательность имеет только один частичный предел, равный нулю) является (c)-точкой последовательности (19). По теореме 2 подпоследовательность $\{S_{m_k}\}$ сходится к числу нуль, к которому последовательность (19) суммируется $(c, 1)$-методом.

4. Наконец, докажем следующее предложение.

Теорема 4. *Пусть $\{n_i\}$ — наперед заданная возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел. Для того чтобы существовала последовательность* (2), *суммируемая методом Абеля — Пуассона к конечному числу, отличному от нуля, для которой средние Чезаро порядка $\alpha \geqslant 1$ удовлетворяли бы условиям: $\sigma_{n_i}^\alpha > 0$ и $\sigma_n^\alpha = 0$ для $n \neq n_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_i}{n_{i+1}} = 1. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2 работы [1].

Докажем достаточность. Пусть возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $\{n_i\}$ удовлетворяет равенству (20). Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_{i+1}^{\alpha+1} - n_i^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Обозначим $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$, где $a_n = \dfrac{n_{i+1}^{\alpha+1} - n_i^{\alpha+1}}{\Gamma(a+2)}$, если $n = n_i$, и $a_n = 0$, если $n \neq n_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Имеем

$$S_{n_i} = \sum_{k=0}^{n_i} a_k = \sum_{\nu=0}^{i} \frac{n_{\nu+1}^{\alpha+1} - n_\nu^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (n_{i+1}^{\alpha+1} - n_0^{\alpha+1}).$$

Если $n_i \leqslant n < n_{i+1}$, то в силу (20) получаем

$$S_n = \sum_{k=0}^{n_i} a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (n_{i+1}^{\alpha+1} - n_0^{\alpha+1}) = \frac{n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \, \frac{n_{i+1}^{\alpha+1} - n_0^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} \sim$$

$$\sim \frac{n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \quad (n \to \infty).$$

Отсюда по известной теореме (см. [4, стр. 255]) находим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (n_{i+1}^{\alpha+1} - n_i^{\alpha+1}) x^{n_i} \sim \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n \quad (x \to 1-0),$$

т. е.

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)^{\alpha+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (n_{i+1}^{\alpha+1} - n_i^{\alpha+1}) x^{n_i} = 1.$$

Таким образом, обозначив средние Чезаро порядка α для последовательности $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ через σ_n^α, имеем

$$\frac{n_{i+1}^{\alpha+1} - n_i^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = A_{n_i}^\alpha \sigma_{n_i}^\alpha, \quad \sigma_{m_i}^\alpha = 0,$$

откуда $\sigma_{n_i}^\alpha > 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\{n_i\} \cup \{m_i\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов, Обобщение двух тауберовых теорем Харди и Литтльвуда, УМЖ, т. 26, № 6, 1974.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, «Мир», М., 1965.
3. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.
4. Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
5. Н. А. Давыдов, (c)-свойство методов Чезаро и Абеля — Пуассона и теоремы тауберова типа, Матем. сб., т. 60(102), № 2, 1963.
6. Н. А. Давыдов, О (c)-точках последовательности, суммируемой методом Абеля — Пуассона, Матем. сб., т. 43(85), № 1, 1957.

Поступила 2.VII 1973 г.

Киевский педагогический институт