УДК 517.521.8

Условие равносильности логарифмических методов суммирования

А. П. Кохановский

1. Пусть дана последовательность $\{s_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Говорят, что последовательность $\{s_n\}$ суммируется к числу s полунепрерывным логарифмическим методом или (L)-методом и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(L)$, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1}$ сходится для $x \in (0; 1)$ и

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln(1-x)^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} = s. \tag{1}$$

Если же

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s, \tag{2}$$

где

$$t_n = \frac{1}{\ln(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{k+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

то говорят, что последовательность $\{s_n\}$ суммируется к числу s дискретным логарифмическим методом или (l)-методом и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(l)$.

Если выражение, стоящее под знаком предела в соотношении (1), ограничено для всех $x \in [0; 1)$ или последовательность (3) ограничена, то это обозначают соответственно $s_n = O(1)\ (L)$ и $s_n = O(1)\ (l)$.

В данной работе докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s_n > -\mu \ln(n+1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *где* μ — *произвольное фиксированное положительное число. Если* $s_n = O(1)(L)$, *то* $s_n = O(1)(l)$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(L)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(l)$.

Эта теорема обобщает известную теорему К. Ишигуро [1]: если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(L)$ и $s_n > -\mu$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s(l).$$

Теорема 1 в некотором смысле точная, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть положительные числа* α_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *монотонно и сколь угодно медленно стремятся к* $+\infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует последовательность* $\{s_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0 (L)$ *и* $s_n = O(\alpha_n \ln n)$, *однако эта последовательность не суммируется* (l)-*методом*.

2. Для доказательства этих теорем понадобятся вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Если* $s_n = O(1)$ (l) *и* $s_n > -\mu \ln(n+1)$ $(n=0, 1, 2, \ldots;$ $\mu > 0)$, *то* $\{t_n\}$ — *медленно убывающая последовательность*.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{s_n\}$ *такова, что ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ *сходится для всех* $x \in (0; 1)$.

Если

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) s_n x^n = s,$$

то

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n s_n x^n = s,$$

где $\tau_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}$.

Доказательство леммы 1. Из равенств (3) следует, что

$$s_n = (n+1)\ln(n+1)(t_n - t_{n-1}) + (n+1)\ln\frac{n+2}{n+1}\cdot t_n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Значит,

$$(n+1)\ln(n+1)(t_n - t_{n-1}) > -\mu\ln(n+1) + O(1)$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Найдется такая постоянная $\mu_1 > \mu$, что $(n+1)\ln(n+1)(t_n - t_{n-1}) > -\mu_1 \ln(n+1)$ для всех достаточно больших n $(n > N)$. Отсюда

$$t_n - t_{n-1} > -\mu_1 \frac{1}{n+1} \quad (n > N)$$

и

$$t_m - t_n = (t_m - t_{m-1}) + \ldots + (t_{n+1} - t_n) >$$

$$> -\mu_1\left(\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n+2}\right) = -\mu_1 \ln\frac{m}{n} + o(1) \quad (n\to\infty,\ m > n).$$

Итак, $\varliminf\limits_{n\to\infty} (t_m - t_n) \geqslant 0$, когда $1 < \frac{m}{n} \to 1$ $(n\to\infty)$, т. е. $\{t_n\}$ — медленно убывающая последовательность. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Известно [2, стр. 213], что

$$\frac{\tau_n}{n+1} = \int_0^1 y^n \ln\frac{1}{1-y}\,dy \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

По известной теореме [3, стр. 48] эти несобственные интегралы Римана можно рассматривать как интегралы Лебега. Из суммируемости функции $\ln\frac{1}{1-t}$ на отрезке [0; 1] следует [4, стр. 271], что функция $\mu(y)=\int\limits_0^y \ln\frac{1}{1-t}\,dt$ абсолютно непрерывна на этом отрезке. Поэтому [4, стр. 290]

$$(L)\int\limits_0^1 y^n \ln\frac{1}{1-y}\,dy=(S)\int\limits_0^1 y^n d\mu(y)\quad (n=0,1,2,\ldots),\tag{5}$$

где слева стоит интеграл Лебега, а справа — интеграл Стильтьеса.

Сделав в правых частях равенств (5) замену переменной $y=\frac{u}{x}$ $(0<x<1)$, получим

$$\frac{\tau_n}{n+1}x^n=\int\limits_0^x u^n d\mu\left(\frac{u}{x}\right)\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Отсюда имеем

$$\frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n s_n x^n=\frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)s_n\frac{\tau_n}{n+1}x^n=$$

$$=\frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}}\int\limits_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)s_n u^n d\mu\left(\frac{u}{x}\right)=\frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}}\int\limits_0^x\frac{f(u)}{(1-u)^2}\,d\mu\left(\frac{u}{x}\right),\tag{6}$$

где $f(u)=(1-u)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)s_n u^n$.

Фиксируем число $x_0\in(0;1)$. Тогда для $x>x_0$

$$\frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}}\int\limits_0^{x_0}\frac{1}{(1-u)^2}\,d\mu\left(\frac{u}{x}\right)\leqslant\frac{1-x}{(1-x_0)^2}\frac{1}{\ln\frac{1}{1-x}}[\mu(1)-\mu(0)]\to 0\ (x\to 1-0).$$

Положим в равенстве (6) $s_n=1$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Тогда $f(u)\equiv 1$ $(0\leqslant u<1)$ и

$$\frac{1-x}{\ln(1-x)^{-1}}\int\limits_0^x\frac{1}{(1-u)^2}\,d\mu\left(\frac{u}{x}\right)=$$

$$=\frac{1-x}{\ln(1-x)^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n x^n=\frac{1}{x}\to 1\ (x\to 1-0).$$

Пользуясь леммой 1 работы [5], убеждаемся в том, что интегральное преобразование (6) будет регулярным, т. е. из $f(u)\to S$ $(u\to 1-0)$ следует

$$\frac{1-x}{\ln\frac{1}{1-x}}\int\limits_0^x\frac{f(u)}{(1-u)^2}\,d\mu\left(\frac{u}{x}\right)\to s\quad (x\to 1-0).$$

Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Докажем сначала первую часть этой теоремы.

Положим

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{для } 0\leqslant x<e^{-1},\\ \dfrac{1}{x} & \text{для } e^{-1}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{e}{e-1}x-\frac{1}{e-1}\leqslant g(x)\leqslant -ex+(1+e). \tag{7}$$

Из условия теоремы $s_n>-\mu\ln(n+1)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ следует существование числа $\mu_1>\mu$ такого, что $s_n>-\mu_1\tau_n$ $\left(n=0,1,2,\ldots;\ \tau_n=1+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$.

Докажем далее, что если $s_n=O(1)$ (L) и $s_n>-\mu_1\tau_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, то

$$W(x)\equiv\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{n+2}g(x^{n+2})=O(1)\quad(0<\alpha\leqslant x<1).$$

Действительно, пользуясь неравенствами (7), получим

$$W(x)=\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{s_n+\mu_1\tau_n}{n+1}x^{n+2}g(x^{n+2})-\frac{\mu_1\tau_n}{n+1}x^{n+2}g(x^{n+2})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\ln(1-x)^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{s_n+\mu_1\tau_n}{n+1}x^{n+2}[-ex^{n+2}+(1+e)]-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_1\tau_n}{n+1}x^{n+2}\left(\frac{e}{e-1}x^{n+2}-\frac{1}{e-1}\right)\right\}=\frac{1}{\ln\frac{1}{1-x}}\left\{-e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{2(n+2)}+\right.$$

$$+(1+e)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n+1}x^{n+2}-e\mu_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{n+1}x^{2(n+2)}+(1+e)\mu_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{n+1}x^{n+2}-$$

$$\left.-\frac{e\mu_1}{e-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{n+1}x^{2(n+2)}+\frac{\mu_1}{e-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{n+1}x^{n+2}\right\}=O(1)+$$

$$+\mu_1\frac{e^2}{e-1}\,\frac{\psi(x)-\psi(x^2)}{\ln\frac{1}{1-x}}\quad(0<x<1),$$

где $\psi(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{n+1}x^{n+2}$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{n+2}x^{n+2}=\psi(x)-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}=\psi(x)+O(1)\quad(0\leqslant x<1).$$

Значит,

$$\frac{\psi(x)-\psi(x^2)}{\ln(1-x)^{-1}}=\frac{1}{2}\frac{\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)^2-\left(\ln\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\ln\frac{1}{1-x}}+O(1)=O(1)$$

для $x\in(\alpha;\ 1)$, где $(0<\alpha<1)$.

Итак, для всех $x\in(\alpha;\ 1)$ $W(x)\leqslant O(1)$.

Поступая аналогично, можно показать, что и $W(x)\geqslant O(1)$ $(\alpha<x<1)$ и, следовательно,

$$W(x)=O(1)\quad(\alpha<x<1).\tag{8}$$

Пусть $x=e^{-\frac{1}{N}}$, где N $(N\geqslant 2)$ — натуральное число. Тогда

$$g(x^{n+2})=\begin{cases}0, & \text{если } (n+2)>N,\\ \dfrac{1}{x^{n+2}}, & \text{если } (n+2)\leqslant N.\end{cases}$$

Отсюда и из (8) для $N>N_0$ имеем

$$W\left(e^{-\frac{1}{N}}\right)=\frac{1}{\ln\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)^{-1}}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{s_n}{n+1}=O(1).$$

Так как

$$\ln\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)^{-1}\sim\ln N\quad(N\to\infty),$$

то

$$t_{N-2}=\frac{1}{\ln N}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{s_n}{n+1}=O(1)\quad(N=2,3,\ldots)$$

что и требовалось доказать в первой части теоремы 1.

Вторая часть теоремы 1 следует из ее первой части, леммы 1 и теоремы 1 работы [5].

4. Доказательство теоремы 2. По теореме В. И. Мельника [6] существует последовательность $\{A_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, удовлетворяющая условию $A_n=O(\alpha_n)$ и суммируемая к числу $s=0$ методом Пуассона — Абеля, однако эта последовательность не суммируется никаким методом Чезаро.

Последовательность $\{s_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ определим следующей системой уравнений:

$$t'_n=\frac{1}{\tau_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{s_k}{k+1}=\frac{A_0+A_1+\ldots+A_n}{n+1}\quad(n=0,1,2,\ldots).\tag{9}$$

Очевидно, что последовательность $\{s_n\}$ определяется таким образом однозначно, $t'_n=O(\alpha_n)$ и последовательность t'_n расходится.

Из равенств (9) следуют равенства:

$$s_n=(n+1)\tau_{n-1}(t'_n-t'_{n-1})+t'_n\quad(n=1,2,\ldots),$$

$$A_n = (n+1)(t'_n - t'_{n-1}) + t'_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{s_n}{\tau_{n-1}} = A_n - t'_{n-1} + \frac{t'_n}{\tau_{n-1}} = O(\alpha_n)$$

и, следовательно, $s_n = O(\alpha_n \ln n)$.

Убедимся, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0\,(L)$. В самом деле,

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t'_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (A_0 + \ldots + A_n)\, x^n =$$
$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \to 0 \quad (x \to 1-0).$$

По лемме 2

$$\frac{1-x}{\ln \frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n t'_n x^n \to 0 \quad (x \to 1-0).$$

Заметив справедливость равенства

$$\frac{1-x}{\ln \frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n t'_n x^{n+1} = \frac{1}{\ln \frac{1}{1-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1}\, x^{n+1},$$

убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.

В заключение автор благодарит Н. А. Давыдова за постоянное внимание и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Ishiguro, A converse theorem on the summability methods, Proc. Japan Acad., 39, N 1, 1963.
2. Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы «Наука», М., 1969.
3. Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, Интеграл, мера и производная, «Наука», М., 1964.
4. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, ГИТТЛ, М., 1957.
5. А. П. Кохановский, Теоремы тауберова типа для полунепрерывного логарифмического метода суммирования рядов, УМЖ, т. 26, № 6, 1974.
6. В. И. Мельник, О суммировании рядов методами Чезаро и Абеля — Пуассона, Матем. сб., т. 67(109), № 4, 1965.

Поступила 21.I 1974 г.
Киевский педагогический институт