УДК 517.5

О поведении ряда Дирихле на границе области сходимости

Е. К. Крутиголова

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с простыми нулями λ_n $(n \geqslant 1)$ и $h(\varphi)$ — ее индикатриса роста. Обозначим через $\gamma(t)$ переобразование Бореля функции $L(\lambda)$ и через $\bar{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$. Предположим также, что начало координат принадлежит D.

В работе [1] доказана теорема, утверждающая, что для того, чтобы произвольную аналитическую в $\overline{D}$ или аналитическую в D и непрерывную в $\overline{D}$ функцию $f(z)$ можно было представить в D абсолютно сходящимся рядом Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы $L(\lambda)$ была функцией вполне регулярного роста и чтобы выполнялось условие

$$\ln |L'(\lambda_n)| > [h(\varphi_n) - \varepsilon] |\lambda_n|, \quad \lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}, \quad n > K(\varepsilon), \ \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Для коэффициентов a_n имеются формулы $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C f(t)\,\psi_n(t)\,dt \ (n \geqslant 1)$, где $\{\psi_n(t)\}$ — система функций, биортогональных к системе $\{e^{\lambda_k z}\}$ $(k \geqslant 1)$:

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad \lambda = |\lambda| e^{-i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_k t} \psi_n(t)\,dt = \delta_{nk} \ (n \geqslant 1, \ k \geqslant 1),$$

C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. В случае, если $f(z)$ — аналитическая в D и непрерывная на $\overline{D}$, то в качестве контура C берется граница области $\overline{D}$.

В этой статье будем изучать условия, достаточные для того, чтобы ряд (1) был сходящимся в граничных точках области $\overline{D}$.

Вопрос об сходимости ряда (1) при всех $z \in \overline{D}$ исследован в работе [2] при условии, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{\lambda_n z}}{\lambda_n^2 L'(\lambda_n)} \right| < \infty, \quad z \in \overline{D},$$

и $f(z)$ — аналитическая в D и непрерывная вместе с $f'(z)$ и $f''(z)$ на $\overline{D}$. Если $L(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{N} e^{a_k \lambda}$, $3 \leqslant N < \infty$, и $f(z)$—аналитическая в D, непрерывная на $\overline{D}$ и удовлетворяет условию Дини, то сходимость ряда (1) к $f(z)$ при всех $z \in \overline{D}$ установлена в работе [3].

Результаты, полученные в этой статье, фактически примыкают к результатам, полученным В. К. Дзядыком в работе [3]. Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с простыми нулями. Предположим, что выполняется условие* (2) *и, кроме того:*

1) *нули функции $L(\lambda)$ расположены на $3 \leqslant N < \infty$ лучах, выходящих из начала координат, т. е.*

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{N} \{\lambda_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n^{(k)}|} = \tau_k, \ 0 < \tau_k < \infty;$$

2) $\left|\frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}\right| < M,\ z \in \overline{D},\ M = \text{const},\ n = 1, 2, \ldots;$

3) $L(\lambda)$ *представима в виде*

$$L(\lambda) = \int\limits_C e^{\lambda t} d\sigma(t), \quad C = \partial\overline{D},$$

где $\sigma(t)$ — *функция ограниченной вариации на* $\partial\overline{D}$.

Тогда для произвольной функции $f(z)$, *аналитической в многоугольной области* D *и непрерывной вместе с* $f'(z)$ *на* $\overline{D}$, *ряд* (1) *сходится во всех неугловых точках* $z \in \overline{D}$.

Доказательство. Так как ряд (1) сходится абсолютно при $z \in D$ и по условию нули функции $L(\lambda)$ расположены на N лучах, то можем записать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} e^{\lambda_n^{(1)} z} + \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(N)} e^{\lambda_n^{(N)} z}, \tag{3}$$

где каждый из рядов

$$\varphi_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{\lambda_n^{(k)} z}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

сходится в полуплоскости D_k такой, что пересечение полуплоскостей $D_1 \ldots$ $\ldots D_N$ образует многоугольную область D. Поэтому все ряды в правой части (3), кроме ряда $\varphi_j(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} e^{\lambda_n^{(j)} z}$, сходятся абсолютно во всех внутренних точках той стороны многоугольника, которая лежит на прямой ограничивающей полуплоскость D_j. Так как функция $\varphi_j(z)$ непрерывна при $z \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$, где α_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — вершины многоугольника, то рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые применялись при доказательстве теоремы 1 в работе [4], убедимся, что ряд (1) суммируется методом Абеля в указанных точках. Для коэффициента a_n функции, аналитической в D и непрерывной на $\overline{D}$, имеется оценка (см. [2]):

$$|a_n| < \frac{M}{|\lambda_n L'(\lambda_n)|}, \quad M = \text{const}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Вследствие условия 1) теоремы имеем

$$\frac{1}{|\lambda_n^{(k)}|} < \frac{c_1}{n}, \quad n > M_1, \quad M_1 = \text{const}, \quad c_1 = \text{const}.$$

Отсюда, учитывая условие 2) теоремы, получим

$$|a_n^{(k)} e^{\lambda_n^{(k)} z}| < \frac{M_2}{n}, \quad z \in \overline{D}, \quad M_2 = \text{const}.$$

В силу этого неравенства и того факта, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} e^{\lambda_n^{(j)} z}$ суммируется методом Абеля при $z \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ на основании тауберовской теоремы Литтльвуда [5] получаем, что ряд сходится в указанных точках. Поскольку для других сторон многоугольника рассуждения будут вполне аналогичными, то этим теорема доказана полностью.

Замечание. Из доказательства теоремы видим, что если при выполнении условий этой теоремы ряд (1) суммируется в точке $z^* \in \partial\overline{D}$ некоторым регулярным методом таким, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ условие $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ является тауберовским (в частности, методами Чезаро, Абеля и др.), то ряд (1) сходится при $z = z^*$. Поэтому, если взять, например, $L(\lambda) = \cos\lambda \cdot \cos i\lambda$, то, как легко убедиться, даже для аналитической в $\overline{D}$ функции $f(z)$, не удовлетворяющей условию $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,\gamma(t)\,dt = 0$, ряд (1) расходится в угловых точках $z \in \partial\overline{D}$. В силу доказанного выше, он и не суммируется указанными методами в этих точках.

Теорема 2. *Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вид*

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{a_k\lambda}, \quad 3 \leqslant N < \infty,$$

и пусть $f(z)$ — произвольная функция, аналитическая в многоугольнике D с вершинами в точках a_k и непрерывная на $\overline{D}$. Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\omega_f(\lambda_n^{(j)}) + \omega_f(\lambda_n^{(j+1)})], \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где (*см.* [3])

$$\omega_f(\lambda_n^{(j)}) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\frac{2}{r+1}}} \left\{\int_0^t f[r(t-\eta)]\, e^{\lambda_n^{(j)}\eta} d\eta\right\} \gamma(t)\,dt,$$

и при всех $u \in (0, 2\pi)$ сходятся ряды Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\psi_j)\, e^{inu}$, где $A_n(\psi_j)$ — коэффициенты Фурье функции

$$\psi_j(t) = \left[f\left(a_{j+1} - \frac{a_j - a_{j+1}}{2\pi} t\right) - f(a_{j+1}) + \frac{f(a_{j+1}) - f(a_j)}{2\pi} t\right] e^{-\frac{it}{2}},$$

то ряд (1), *в котором $a_n = \frac{\omega_f(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}$, сходится при всех $z \in \overline{D}$.*

Доказательство. Пользуясь методом, примененным в работе [3], легко убедиться, что:

1) $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{j=1}^{N} \{\lambda_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}, \quad |\lambda_n^{(j)} - \dot{\lambda}_n^{(j)}| = O(e^{-c_1 n}),$

$c_1 > 0,\ n > \Lambda,\ \Lambda = \text{const},\ \dot{\lambda}_n^{(j)} = \frac{\pi n}{\alpha_j} - \beta_j, \quad \alpha_j = \text{const}, \quad \beta_j = \text{const};$

2) $\left|\frac{e^{\lambda_n^{(j)} z}}{L'(\lambda_n^{(j)})}\right| < M, \quad M = \text{const}, \quad z \in \overline{D};$

3) $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\omega_f(\lambda_n^{(j)})}{L'(\lambda_n^{(j)})} e^{\lambda_n^{(j)} z} = M_j e^{b_j z} \sum_{n=n_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=1}^{N} c_k f(a_k)}{\dot{\lambda}_n^{(j)}} + A_n(\psi_j)\,(a_{j+1} - \right.$

$$- a_j) + \sum_{k\neq j, j+1}^{N} \frac{a_k - a_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f\left(a_k + \frac{a_j - a_k}{2\pi} t\right) - f(a_k) \right] e^{i\frac{2n-1}{2} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_{j+1}}} dt +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Biggr\} e^{inu}, \tag{4}$$

где $u = \operatorname{Im}\left\{\frac{2\pi}{i(a_j - a_{j+1})}\left(z - \frac{a_j + a_{j+1}}{2}\right) + \pi i\right\}$, $M_j = \text{const}$, $b_j = \text{const}$, $z \in (a_j, a_{j+1})$, $n_0 = n_0(\Lambda)$, $\Lambda = \text{const}$. Учитывая, что по условию ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n(\psi_j) e^{inu}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, сходятся при $u \in (0, 2\pi)$ и что

$$\frac{1}{\dot{\lambda}_n^{(j)}} \sum_{k=1}^{N} c_k f(a_k) + \frac{a_k - a_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f\left(a_k + \frac{a_j - a_k}{2\pi} t\right) - f(a_k) \right] \times$$

$$\times e^{i\frac{2n-1}{2} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_{j+1}} t} dt = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

тем же методом, что и в теореме 1, докажем, что ряд в правой части (4) сходится при $u \in (0, 2\pi)$. Отсюда, принимая во внимание условие 1), получаем утверждение теоремы.

В связи с тем, что при исследовании вопроса о сходимости ряда (1) в граничных точках $z \in \partial\overline{D}$ часто приходится требовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} \right| < M, \quad z \in \overline{D}, \quad M = \text{const}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

возникает вопрос: какими особенностями обладают те функции $L(\lambda)$, для которых имеет место это неравенство?

Предположим, что нули функции $L(\lambda)$ расположены на $3 \leqslant N < \infty$ лучах, т. е.

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{N} \{\lambda_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \lambda_n^{(k)} = n e^{-i\varphi_k}.$$

Покажем теперь, что существует связь между характером особенностей функции $\gamma(t)$ и порядком роста величины $\frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}$, $z \in \partial\overline{D}$, $n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим для этого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} L'(\lambda_n^{(k)}) e^{-\lambda_n^{(k)} z}$ (k — фиксированное, $1 \leqslant k \leqslant N$). Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует постоянная A_ε такая, что

$$|L'(\lambda_n^{(k)})| < A_\varepsilon e^{[h(\varphi_k) + \varepsilon]\, |\lambda_n^{(k)}|},$$

причем $h(\varphi_k) = x \cos\varphi_k + y \sin\varphi_k$ представляет собой расстояние от начала координат до стороны $[a_k, a_{k+1}]$ многоугольника $\overline{D}$.

Пусть теперь точка $z \in Q_k$, где Q_k — полуплоскость такая, что сторона $[a_k, a_{k+1}]$ многоугольника лежит на прямой, ограничивающей эту плоскость, и что множество $\overline{D}$ лежит вне Q_k. Тогда

$$\operatorname{Re}\{\lambda_n^{(k)} z\} > h(\varphi_k)\, |\lambda_n^{(k)}| \quad \text{и} \quad |L'(\lambda_n^{(k)}) e^{-\lambda_n^{(k)} z}| = O(e^{-\rho n}), \quad \rho > 0,$$

(ρ зависит от z, но если $z \in \overline{F} \subset Q_k$, то ρ может быть выбрано не зависящим от z, а только от расстояния от $\overline{F}$ до Q_k). Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} L'(\lambda_n^{(k)}) e^{-\lambda_n^{(k)} z}$ сходится абсолютно при $z \in Q_k$ и равномерно на любом замкнутом ограниченном множестве $\overline{F}$, лежащем в Q_k. Как известно, $L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \gamma(t)\, dt$, где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L'(\lambda_n^{(k)})}{e^{\lambda_n^{(k)} z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_C t e^{\lambda_n^{(k)} t} \gamma(t)\, dt}{e^{\lambda_n^{(k)} z}}.$$

Контур C всегда можно выбрать таким образом, что прямая, проходящая через точку z параллельно отрезку $[a_k, a_{k+1}]$, будет находиться вне области, ограниченной контуром C. Поэтому

$$\mathrm{Re}\,\{\lambda_n^{(k)} (t - z)\} < \rho_1 |\lambda_n^{(k)}|, \quad \rho_1 = \mathrm{const},$$

ρ_1 зависит от z, но если $z \in \overline{F} \subset Q_k$, то ρ_1, можно выбрать не зависящим от z, а только от расстояния между $\overline{F}$ и контуром C.

Отсюда, учитывая еще, что $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{|\lambda_n^{(k)}|} = \tau_k\ (0 < \tau_k < \infty)$, следует, что $e^{\lambda_n^{(k)}(t-z)} = O(e^{-\rho_2 n})$, $\rho_2 = \mathrm{const}$, ρ_2 зависит от ρ_1. Эти соображения оправдывают перестановку суммы и интеграла, а значит и следующую формулу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L'(\lambda_n^{(k)})}{e^{\lambda_n^{(k)} z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C t\gamma(t) \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n^{(k)}(t-z)} dt = \frac{-1}{2\pi i} \int_C t\gamma(t) \frac{e^{e^{-i\varphi_k t}}}{e^{e^{-i\varphi_k t}} - e^{e^{-i\varphi_k z}}}\, dt.$$

Если, например, функция $\gamma(t)$ имеет в точках a_k простые полюсы и не имеет других особенностей, то, вычисляя этот интеграл, получим функцию $\Phi(z)$, имеющую также простые полюсы в точках a_k. Таким образом, установлено, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} L'(\lambda_n^{(k)}) e^{-\lambda_n^{(k)} z}$ имеет на прямой, ограничивающей полуплоскость Q_k, только простые полюсы и не имеет других особенностей. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} L'(\lambda_n^{(k)}) e^{-\lambda_n^{(k)} z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L'(\lambda_n^{(k)})}{e^{|\lambda_n^{(k)}| h(\varphi_k)}} e^{-|\lambda_n^{(k)}| [e^{-i\varphi_k} z - h(\varphi_k)]},$$

то положив $e^{-e^{-i\varphi_k} z + h(\varphi_k)} = \zeta$, получим $|\zeta| \leqslant 1$ при $\mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi_k} z) \geqslant h(\varphi_k)$.

Теперь имеем степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} L'(\lambda_n^{(k)}) e^{-|\lambda_n^{(k)}| h(\varphi_k)} \zeta^n$ с единичным кругом сходимости. Сумма этого ряда имеет только один простой полюс на окружности $|\zeta| = 1$. Следовательно, коэффициенты этого ряда ограничены и к нулю не стремятся.

Таким образом, из предположения, что $\gamma(t)$ имеет только простые полюсы, получили, что при $z \in [a_k, a_{k+1}]$

$$0 < B_1 < \frac{e^{|\lambda_n^{(k)}| h(\varphi_k)}}{|L'(\lambda_n^{(k)})|} = \left| \frac{e^{\lambda_n^{(k)} z}}{L'(\lambda_n^{(k)})} \right| < B_2, \quad B_1 = \text{const}, \quad B_2 = \text{const}.$$

Поскольку при $z \in [a_j, a_{j+1}]$ $(j \neq k)$ имеем $\mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi_k} z) < h(\varphi_k)$, то отсюда заключаем, что при всех $z \in \partial \overline{D}$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{e^{\lambda_n^{(k)} z}}{L'(\lambda_n^{(k)})} \right| < M_1, \quad M_1 = \text{const}.$$

Очевидно, если $\gamma(t)$ будет иметь особенности иного характера, то рассматриваемая величина будет иметь другой порядок роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев, Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 36, № 6, 1972.
2. А. Ф. Леонтьев, О представлении аналитических функций в замкнутой выпуклой области рядами Дирихле, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 3, 1973.
3. В. К. Дзядык, Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках, Матем. сб., т. 95 (137), № 4, 1974.
4. В. К. Дзядык, Е. К. Крутиголова, О представлении аналитических функций рядами Дирихле на границе области сходимости, Матем. заметки, т. 14, вып. 6, 1973.
5. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, «Мир», М., 1965.

Поступила 4.VII 1973 г.,
после переработки — 20 XII 1973 г.

Киевский педагогический институт