УДК 517.93

О принципе сведения для дифференциального уравнения с неограниченным операторным коэффициентом

О. Б. Лыкова

В работе [1] установлен принцип сведения для дифференциального уравнения в банаховом пространстве

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t, x) \tag{1}$$

с ограниченным операторным коэффициентом A. Представляет интерес сформулировать принцип сведения для уравнения (1) в случае, когда оператор A является неограниченным. Это легко удается сделать, воспользовавшись одним результатом работ [2, 3]. Приведем его формулировку. Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{A}x + F(t, x), \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}$ — неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, а вектор-функция $F(t, x)$ со значениями в $\mathfrak{B}$ непрерывна в области $R \times \times \mathfrak{B}$ (R — вещественная ось) и удовлетворяет в этой области условиям:

$$\| F(t, x) \| \leqslant M, \quad F(t, x) \in \mathrm{Lip}\,\{x;\, q\}, \tag{3}$$

где M, q — некоторые константы. Кроме того, предполагается, что выполняется одно из условий:

а) $F(t, x)$ входит в область определения оператора $\mathfrak{A}$;

б) $F(t, x)$ — дифференцируема.

Относительно неограниченного оператора $\mathfrak{A}$ предполагается, что его спектр состоит из трех частей: $\sigma_1(\mathfrak{A})$ — критической части, лежащей в некоторой α-окрестности мнимой оси, и $\sigma'(\mathfrak{A})$, $\sigma''(\mathfrak{A})$ — некритических частей, расположенных соответственно в левой и правой полуплоскостях. Предполагается также, что $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп $\{e^{\mathfrak{A}'t}\}$ и $\{e^{\mathfrak{A}''t}\}$, $t \geqslant 0$, действующими соответственно в подпространствах $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$. Следовательно, операторы $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ являются замкнутыми и для всех λ с достаточно большой вещественной частью имеют резольвенты и, кроме того, выполняются неравенства

$$\| e^{\mathfrak{A}'t} \| \leqslant N' e^{-\rho_1 t}, \; t > 0, \; \rho_1 < 0; \; \| e^{\mathfrak{A}''t} \| \leqslant N'' e^{\rho_2 t}, \; t < 0, \; \rho_2 > 0; \tag{4}$$

$\mathfrak{A}_1$ является ограниченным оператором в подпространстве $\mathfrak{B}_1$ и удовлетворяет неравенству

$$\| e^{\mathfrak{A}_1 t} \| \leqslant N_1 e^{\alpha |t|}, \; t \in R, \tag{5}$$

с достаточно малой константой α.

Здесь P', P'', P_1; $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_1$ — соответственно спектральные проекторы и инвариантные подпространства оператора $\mathfrak{A}$, соответствующие спектральным множествам $\sigma'(\mathfrak{A})$, $\sigma''(\mathfrak{A})$, $\sigma_1(\mathfrak{A})$; $\mathfrak{A}' = P'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'' = P''\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1 = P_1\mathfrak{A}$.

При этих предположениях в работе [3] доказано существование единственного (ρ, η)-интегрального многообразия уравнения (2), состоящего из всех решений этого уравнения, лежащих в цилиндре $\Pi_\rho \, \| Px(t) \| \leqslant \rho$, $t \in R$. Этот результат позволяет установить принцип сведения для уравнения (2).

Итак, будем исходить из рассмотрения уравнения (2) в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ с неограниченным оператором $\mathfrak{A}$ и вектор-функцией $F(t, x, \varepsilon)$.

Пусть оператор $\mathfrak{A}$ является замкнутым, определенным на линейном многообразии $D(\mathfrak{A})$ пространства $\mathfrak{B}$ и действующим в $\mathfrak{B}$.

Предположим, что его спектр состоит из двух замкнутых частей: ограниченного множества $\sigma_1(\mathfrak{A})$, расположенного на мнимой оси, и замкнутого множества $\sigma_2(\mathfrak{A})$, не пересекающегося с мнимой осью и расположенного слева от нее.

Введя проекционный оператор $P_1 \left(P_1 = -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_1} R_{\mathfrak{A}}(\lambda) d\lambda \right)$, разложим пространство $\mathfrak{B}$ в прямую сумму подпространств: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_1 = P_1\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2 = (I - P_1)\mathfrak{B}$, при этом $\mathfrak{B}_1$ целиком лежит в области определения $D(\mathfrak{A})$ оператора $\mathfrak{A}$.

Спектр сужения $\mathfrak{A}_1$ оператора $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}_1$ совпадает с σ_1. Сужение $\mathfrak{A}_2$ оператора $\mathfrak{A}$ на множестве $(I - P_1) D(\mathfrak{A}) = D(\mathfrak{A}_2)$ является замкнутым линейным оператором, действующим в $\mathfrak{B}_2$, спектр которого совпадает с σ_2.

Таким образом, рассмотрение исходного уравнения сведено к рассмотрению расщепленных относительно спектра $\sigma(\mathfrak{A})$ уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mathfrak{A}_1 \xi + X_1(t, \xi, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= \mathfrak{A}_2 h + X_2(t, \xi, h, \varepsilon) \end{aligned} \tag{6}$$

с ограниченным оператором $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{B}_1$ и замкнутым неограниченным оператором $\mathfrak{A}_2$ в ${}_2$.

Пусть для ограниченного оператора имеет место оценка (5). Предположим, что замкнутый оператор $\mathfrak{A}_2$ порождает сильно непрерывную полугруппу $\{e^{\mathfrak{A}_2 t}\}$, $t > 0$, в $\mathfrak{B}_2$.

Тогда имеет место оценка

$$\| e^{\mathfrak{A}_2 t} \| \leqslant De^{-\mu t}, \ t > 0, \ \mu > 0, \tag{7}$$

где D, μ — некоторые константы.

Относительно вектор-функций $X_1(t, \xi, h, \varepsilon)$, $X_2(t, \xi, h, \varepsilon)$ полагаем, что выполняются условия, обеспечивающие существование гладкого интегрального многообразия S_t уравнений (6), представимого соотношением

$$h = \varphi(t, \xi, \varepsilon). \tag{8}$$

Наряду с уравнениями (6) рассмотрим уравнение, описывающее поток на многообразии S_t:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{A}_1 \xi + X_1(t, \xi, \varphi(t, \xi, \varepsilon), \varepsilon), \tag{9}$$

и предположим, что оно имеет конечную размерность [4].

Следуя [1], введем в уравнениях (6) вместо h новую переменную s посредством замены: $s = h - \varphi(t, \xi, \varepsilon)$.

В результате получим уравнения типа (4.4) работы [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mathfrak{A}_1 \xi + X_3(t, \xi, s, \varepsilon), \\ \frac{ds}{dt} &= \mathfrak{A}_2 s + X_4(t, \xi, s, \varepsilon), \end{aligned} \tag{10}$$

где, в частности,

$$\{X_3(\ldots), \ X_4(\ldots)\} \in \mathrm{Lip}\{\xi, h; \ \lambda(\varepsilon, \alpha, \delta)\},$$

$$\lambda(\varepsilon, \alpha, \delta) \to 0 \ \text{при} \ \varepsilon \to 0, \ \alpha \to 0, \ \delta \to 0 \ \text{и} \ X_4(t, \xi, 0, \varepsilon) = 0.$$

Согласно формулам замены многообразие S_t^* для уравнений (10) определяется посредством $s = 0$. Поэтому поток на многообразии S_t^* описывается уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathfrak{A}_1 \xi + \bar{X}_3(t, \xi, 0, \varepsilon). \tag{11}$$

Полагаем также, что выполняются следующие условия:

$$\| \bar{X}_3(t, \xi, 0, \varepsilon) \| \leqslant N(t), \quad \bar{X}_3(t, \xi, 0, \varepsilon) \in \mathrm{Lip}\{\xi; \ g(t)\}$$

с интегрально-ограниченными $N(t)$ и $g(t)$.

Принцип сведения, позволяющий вопрос об устойчивости решений уравнений (10) свести к вопросу об устойчивости решений уравнения (11) относительно критической переменной ξ, формулируется таким образом.

Теорема. *Пусть вектор-функции в правых частях уравнений* (10) *и* (11) *обладают указанными выше свойствами. Относительно оператора* $\mathfrak{A}_1$ *полагаем, что его спектр является критическим, расположенным на мнимой оси, а сам оператор является ограниченным и удовлетворяет оценке* [5]; *оператор* $\mathfrak{A}_2$ *является замкнутым, порождающим сильно непрерывную полугруппу, спектр которого не пересекается с мнимой осью и расположен слева от нее, и следовательно, выполняется оценка* (7).

Тогда устойчивость положения равновесия $\xi = 0$, $s = 0$ *уравнений* (10) *полностью определяется устойчивостью положения равновесия* $\xi = 0$ *уравнения* (11), *т. е. если решение* $\zeta = 0$ *уравнения* (11) *устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво, то и решение* $\xi = 0$, $s = 0$ *уравнений* (11) *соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво.*

Тот факт, что оператор $\mathfrak{A}_1$ является оператором типа A_1 из [1], а для неограниченного оператора $\mathfrak{A}_2$ выполняется неравенство (7) типа неравенства (4.25) из [1], позволяет для доказательства теоремы без изменений применить метод, развитый в указанной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Б. Лыкова, Принцип сведения в банаховом пространстве, УМЖ, т. 23, № 4, 1971.
2. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», М., 1970.
3. Веселина Д. Денкова, Исследование ограниченности решений дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве, Автореферат канд. дисс., Институт математики АН УССР, К., 1974.
4. О. Б. Лыкова, Об уравнениях, описывающих потоки на интегральных многообразиях, Сб. Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний, Изд. Института математики АН УССР, К., 1971.
5. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.
6. В. А. Плисс, Принцип сведения в теории устойчивости движения, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 6, 1964.
7. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 18.XI 1974 г.
Институт математики АН УССР