УДК 517.917

О множестве интегральных кривых, входящих в особую точку

С. К. Норкин

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x) + p(x) \tag{1}$$

около изолированной точки покоя—начала координат 0, где P_m и p—непрерывные 3-мерные вектор-функции от x^1, x^2, x^3 в окрестности 0 и удовлетворяют там условиям теоремы единственности. Причем $P_m(\lambda x) = \lambda^m P_m(x)$, $p(x) = 0(\|x\|^m)$ при $\|x|\to 0$.

Предполагаем, что ось Ox^1 является изолированным исключительным направлением [1], т. е возможным направлением касательной к интегральной кривой в точке 0.

Заменой

$$x^1 = r\cos\psi\cos\varphi,\; x^2 = r\cos\psi\sin\varphi,\; x^3 = r\sin\psi$$

систему (1) можно преобразовать к виду

$$
\begin{aligned}
r \cos \psi \frac{d\varphi}{dr} &= F(\varphi, \psi) + f(r, \varphi, \psi), \\
r \frac{d\psi}{dr} &= E(\varphi, \psi) + e(r, \varphi, \psi),
\end{aligned} \tag{2}
$$

где F, E, f, e непрерывны в $S = \{0 < r \leqslant r_0,\ |\varphi| \leqslant \varphi_0,\ |\psi| \leqslant \psi_0\}$, $\varphi_0 > 0$, $\psi_0 > 0$ — достаточно малы, если r_0 мало; f и e исчезают вместе с r, а пара $(0, 0)$ — есть изолированное решение системы

$$F(\varphi, \psi) = 0,\ E(\varphi, \psi) = 0.$$

Пусть в каждой точке области S вектор поля, определяемого системой (1), не ортогонален радиусу-вектору. Тогда, без ограничения общности, можно считать, что он относительно плоскости, ортогональной радиусу-вектору, направлен в полупространство, содержащее точку 0. Это всегда можно достичь, заменив в (1) t на $-t$. Далее полагаем, что каждая поверхность $\varphi = \pm \varphi_0$, $\psi = \pm \psi_0$ состоит из точек входа или выхода (по Важевскому [2, стр. 52]) интегральных кривых системы (2), а граница области S, образованная этими координатными поверхностями, представима в виде $S_1 \cup S_2$, где S_1 — односвязное множество точек входа, а S_2 — точек выхода. В этом случае S будем называть нормальной областью третьего типа (N_3). Доказано, что в N_3 0-кривые (интегральные кривые системы (2), обладающие свойством: $\{\varphi(r), \psi(r)\} \to (0, 0)$ при $r \to 0$) либо отсутствуют, либо образуют поверхность, либо тело. Дополнительное исследование, дающее вполне определенный ответ, составляет пространственный аналог так называемой второй проблемы различения [3, стр. 117].

Эту проблему целесообразно решать для более общей системы

$$
\begin{aligned}
\alpha(r) \frac{d\varphi}{dr} &= \Phi(r, \varphi, \psi), \\
\beta(r) \frac{d\psi}{dr} &= \Psi(r, \varphi, \psi),
\end{aligned} \tag{3}
$$

определенной в области S и удовлетворяющей условиям:

1) $\alpha, \beta \in C[0, r_0]$, $\alpha(r) > 0$, $\beta(r) > 0$;

2) $\Phi, \Psi \in C(S)$;

3) $\varliminf\limits_{r \to 0} \left[\dfrac{r\,|\Phi(r, 0, 0)|}{\alpha(r)} + \dfrac{r\,|\Psi(r, 0, 0)|}{\beta(r)} \right] = 0$;

4) $\varliminf\limits_{r \to 0} \left[\dfrac{r}{\alpha(r)} + \dfrac{r}{\beta(r)} \right] > 0$;

5) $\Phi^2(0, \varphi, \psi) + \Psi^2(0, \varphi, \psi) \neq 0$, когда $\varphi^2 + \psi^2 \neq 0$;

6) $\Phi(r, -\varphi_0, \psi)\,\Phi(r, \varphi_0, \psi) > 0$, $0 < r \leqslant r_0$, $|\psi| \leqslant \psi_0$ или

$$\Psi(r, \varphi, -\psi_0)\,\Psi(r, \varphi, \psi_0) > 0, \quad 0 < r \leqslant r_0,\ |\varphi| \leqslant \varphi_0.$$

Лемма. *Пусть*

$$\Phi(r, \varphi, \psi) = R_1 \varphi^n + C_1 A_1(r), \quad \Psi(r, \varphi, \psi) = R_2 \psi^k + C_2 A_2(r),$$

где $n,\ k \geqslant 2$ — *четные числа;* $R_1,\ R_2,\ C_1,\ C_2 > 0$ — *постоянные,*

$$A_1(r) = \left[\int\limits_r \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\right]^{-\frac{n}{n-1}}{}^{*},\quad A_2(r) = \left[\int\limits_r \frac{d\tau}{\beta(\tau)}\right]^{-\frac{k}{k-1}}$$

и

$$C_1^0 = n^{-\frac{n}{n-1}}\left[R_1(n-1)\right]^{-\frac{1}{n-1}},\quad C_2^0 = k^{-\frac{k}{k-1}}\left[R_2(k-1)\right]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Тогда, если

1) $C_1 < C_1^0,\ C_2 < C_2^0,$

то 0-*кривые системы* (3) *образуют тело;*

2) $C_1 > C_1^0$ *или* $C_2 > C_2^0,$

то 0-*кривых нет.*

Решение системы (3) при выполнении условий леммы ищем в виде:

$$\varphi = u\left[\int\limits_r \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\right]^{-\frac{1}{n-1}},\quad \psi = v\left[\int\limits_r \frac{d\tau}{\beta(\tau)}\right]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Подставив его в (3) и выполнив ряд преобразований, получим

$$\alpha(r)\left[\int\limits_r \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\right]\frac{du}{dr} = R_1u^n - \frac{1}{n-1}u + C_1 \equiv N_1(u),$$

$$\beta(r)\left[\int\limits_r \frac{d\tau}{\beta(\tau)}\right]\frac{dv}{dr} = R_2v^k - \frac{1}{k-1}v + C_2 \equiv N_2(v).$$

Изучая затем расположение корней многочленов N_1 и N_2 [3, стр. 118, 119], приходим к высказанному утверждению.

Теперь установим «критерии» для второй проблемы различения.

Предположим, что

$$\Phi(r, \varphi, \psi) = R_1\varphi^n(1 + \omega_1(\varphi, \psi)) + f_1(r, \varphi, \psi), \tag{4}$$

$$\Psi(r, \varphi, \psi) = R_2\psi^k(1 + \omega_2(\varphi, \psi)) + f_2(r, \varphi, \psi), \tag{5}$$

где $\omega_1,\ \omega_2$ исчезают с $\varphi^2 + \psi^2$, а $f_1,\ f_2$ исчезают вместе с r.

Тогда имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если*

$$f_i(r, \varphi, \psi) \leqslant C_iA_i(r),\ 0 < C_i < C_i^0,\ i = 1, 2, \tag{6}$$

то система (3) *в* S *имеет тело* 0-*кривых;*

$$f_i(r, \varphi, \psi) \geqslant C_iA_i(r),\ C_i > C_i^0, \tag{7}$$

при некотором i, *равном* 1 *или* 2, *то система* (3) *в* S *не имеет* 0-*кривых.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (6). В силу (4), (5) существует достаточно малое $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\Phi(r, \varphi, \psi) < R_1(1 + \delta_1)\varphi^n + C_1(1 + \delta_1)A_1(r) \equiv \Phi_1(r, \varphi),\quad \Psi(r, \varphi, \psi) <$$
$$< R_2(1 + \delta_1)\psi^k + C_2(1 + \delta_1)A_2(r) \equiv \Psi_1(r, \psi). \tag{8}$$

* Интеграл понимается как первообразная, для которой аддитивная постоянная равна нулю.

Тогда для вспомогательной системы

$$\alpha(r)\frac{d\varphi}{dr} = \Phi_1(r, \varphi),$$
$$\beta(r)\frac{d\psi}{dr} = \Psi_1(r, \psi) \tag{9}$$

применимо утверждение первой части леммы.

Действительно, так как $C_i < C_i^0$, $i = 1, 2$, то δ_1 можно взять настолько малым, чтобы имели место неравенства

$$C_1(1+\delta_1) < n^{-\frac{n}{n-1}}[R_1(1+\delta_1)(n-1)]^{-\frac{1}{n-1}},$$
$$C_2(1+\delta_1) < k^{-\frac{k}{k-1}}[R_2(1+\delta_1)(k-1)]^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Поэтому для системы (9) выполняется условие 1) леммы.

Итак, (9) в S имеет тело 0-кривых. Уменьшим значение r_0 настолько, чтобы это тело пересекалось с поверхностью $r = r_0$. Рассмотрим 0-кривые, проходящие через область, ограниченную некоторой замкнутой кривой, на поверхности $r = r_0$. Такие 0-кривые не имеют общих точек с той частью границы области S, которая состоит из точек входа. Эту границу образуют поверхности $\varphi = \varphi_0$ и $\psi = \psi_0$, ибо на них в силу (4), (5), условия 1): $\frac{d\varphi}{dr} > 0$, $\frac{d\psi}{dr} > 0$.

Таким образом, для указанных решений системы (9)

$$\varphi(r) < \varphi_0, \quad \psi(r) < \psi_0, \text{ когда } r < r_0. \tag{10}$$

Предположим теперь, что (3) не имеет 0-кривых. Рассмотрим решения, входящие в S через кривую l: $\{[(\varphi = \varphi_0) \cup (\psi = \psi_0)] \cap (r = \bar{r})\}$, где $\bar{r} < r_0$. По предположению они выходят из S и, следовательно, интегральная поверхность, образованная ими, пересечет выделенное тело интегральных кривых системы (9). Т. е. на l найдется дуга, проходя через которую решения (3) как раз и пересекут тело решений (9). Поэтому для каждого такого решения $L: \{\varphi(r), \psi(r)\}$ системы (3) имеется 0-кривая $K: \{\bar{\varphi}(r), \bar{\psi}(r)\}$ системы (9), пересекающая L в некоторой точке $(r', \varphi', \psi') \in S$, $r' < r < r_0$.

С одной стороны, для K выполняется (10), для L

$$\varphi(\bar{r}) = \varphi_0 \text{ или } \psi(\bar{r}) = \psi_0,$$

а тогда

$$\bar{\varphi}(\bar{r}) < \varphi(\bar{r}) \text{ или } \bar{\psi}(\bar{r}) < \psi(\bar{r}). \tag{11}$$

С другой стороны, в точке пересечения L и K в силу (3), (9), (8) и условия 1)

$$\frac{d[\varphi(r) - \bar{\varphi}(r)]}{dr} < 0, \quad \frac{d[\psi(r) - \bar{\psi}(r)]}{dr} < 0.$$

Это означает, что $\varphi(r) - \bar{\varphi}(r)$ и $\psi(r) - \bar{\psi}(r)$ убывают в некоторой малой окрестности точки $r = r'$. Поэтому при достаточно малых $r - r' > 0$

$$\varphi(r) - \bar{\varphi}(r) \leqslant \varphi(r') - \varphi(r' = 0, \ \psi(r) - \bar{\psi}(r) \leqslant 0 \tag{12}$$

Покажем, что (12) верно при $r \in (r', \bar{r})$. Действительно, допустим, что для некоторого значения $r'' \in (r', \bar{r})$, например,

$$\varphi(r'') - \varphi(r'') > 0$$

Учитывая непрерывность решений системы (3) и (9), можно утверждать существование значения $r^* \in (r', r'')$, для которого

$$\varphi(r^*) - \bar{\varphi}(r^*) = 0, \ \varphi(r) - \bar{\varphi}(r) > 0 \ \text{при} \ r \in (r^*, r''). \tag{13}$$

В силу (8)

$$\Phi(r^*, \varphi(r^*), \psi(r^*)) < \bar{\Phi}_1(r^*, \bar{\varphi}(r^*)).$$

Отсюда и из (3), (9), условия 1) вытекает неравенство

$$\left.\frac{d[\varphi(r) - \bar{\varphi}(r)]}{dr}\right|_{r=r^*} < 0.$$

Поэтому $\varphi(r) - \bar{\varphi}(r) < 0$ при малых $r - r^* > 0$. Однако это противоречит (13).

Итак, (12) справедливо при всех $r \in (r', \bar{r})$. Неравенство (12) для $r = \bar{r}$ противоречит (11). Тем самым доказано, что L есть 0-кривая.

Понятно, что на l имеется дуга, через которую в S входят 0-кривые системы (3). А так как значение $\bar{r}$ — произвольное, то существование тела 0-кривых у системы (3) установлено.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть выполняется (6) для $i = 1$. В силу (4) найдется достаточно малое $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\Phi(r, \varphi, \psi) > R_1(1 - \delta_2)\varphi^n + C_1(1 - \delta_2)A_1(r) \equiv \bar{\Phi}_2(r, \varphi). \tag{14}$$

Тогда вспомогательное уравнение

$$\alpha(r)\ \frac{d\varphi}{dr} = \bar{\Phi}_2(r, \varphi) \tag{15}$$

не имеет 0-кривых.

Действительно, так как $C_1 > C_1^0$, то δ_2 можно взять настолько малым, что

$$C_1(1 - \delta_2) > n^{-\frac{n}{n-1}}[R_1(1 - \delta_2)(n - 1)]^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Тогда на основании второй части леммы, уравнение (15) не имеет решений со свойством: $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. Более того для каждой интегральной кривой $K: \{\varphi = \bar{\varphi}(r)\}$, удовлетворяющей условию: $\bar{\varphi}(\bar{r}) = \varphi_0$, где $\bar{r} < r_0$, найдется значение $r = \bar{\bar{r}}\ (< \bar{r})$, для которого $\bar{\varphi}(\bar{\bar{r}}) = -\varphi_0$.

Предположим, что (3) имеет хотя бы одну 0-кривую $L: \{\varphi(r),\ \psi(r)\}$. Уменьшим значение r_0 настолько, чтобы L входила в S через поверхность $r = r_0$. Теперь можем быть уверены, что

$$-\varphi_0 < \varphi(r) < \varphi_0 \ \text{при} \ r < r_0, \tag{16}$$

ибо граница $\varphi = \varphi_0$ состоит из точек входа, а $\varphi = -\varphi_0$ из точек выхода.

Сравнивая непрерывные функции $\varphi = \bar{\varphi}(r)$, $\varphi = \varphi(r)$ на $[\bar{\bar{r}}, \bar{r}]$, устанавливаем, учитывая (16) и поведение кривой K, равенство

$$\varphi(r^*) = \bar{\varphi}(r^*), \quad r^* \in (\bar{\bar{r}}, \bar{r}). \tag{17}$$

Поэтому в точке $r = r^*$ в силу (14), (3), (15) и условия 1) имеем

$$\frac{d[\varphi(r) - \bar{\varphi}(r)]}{dr} > 0.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\varphi(r) - \bar{\varphi}(r) > 0 \tag{18}$$

при достаточно малых $r - r^* > 0$, ибо (17).

Неравенство (18) можно продолжить на $[r^*, \bar{r}]$, способом указанным для (12). Однако (18) и (16) в точке $r = \bar{r}$ противоречивы. Это противоречие и завершает доказательство теоремы.

Теорема 1 обобщает результат Лонна [3, стр. 120] для плоскости на трехмерное пространство.

Другой «критерий» для второй проблемы различения относится к случаю, когда в S выполнено только одно неравенство из условия 6). Например, для определенности, функция Φ удовлетворяет тому же неравенству и имеет вид (4), а функция Ψ удовлетворяет либо

$$\Psi(r, \varphi, -\psi_0) < 0, \quad \Psi(r, \varphi, \varphi_0) > 0, \tag{19}$$

либо

$$\Psi(r, \varphi, -\psi_0) > 0, \quad \Psi(r, \varphi, \psi_0) < 0 \tag{20}$$

и дополнительно

$$\Psi(r, \varphi_2, \psi_2) - \Psi(r, \varphi_1, \psi_1) \leqslant D_1(r)\,|\varphi_2 - \varphi_1| + D_2(r)(\psi_2 - \psi_1), \tag{21}$$

когда $\psi_2 > \psi_1$, где $D_1(r)$, $D_2(r) \geqslant 0$ непрерывны при $0 < r \leqslant r_0$.

Теорема 2. *Пусть*

1) $f_1(r, \varphi, \psi) \leqslant C_1 A_1(r)$, $0 < C_1 < C_1^0$. *Если выполняется неравенство* (19), *то* 0-*кривые системы* (3) *в* S *образуют тело, если же выполняются* (20), (21) *и*

$$\int_0^{r_0} \frac{D_1(r) + D_2(r)}{\beta(r)}\, dr < +\infty,$$

то 0-*кривые системы* (3) *в* S *образуют поверхность. Пусть*

2) $f_1(r, \varphi, \psi) \geqslant C_1 A_1(r)$, $C_1 > C_1^0$, *тогда система* (3) *в* S *не имеет* 0-*кривых.*

Доказательство также основано на рассмотрении вспомогательных мажорантных и минорантных систем, для которых известно расположение 0-кривых и которые определяют соответствующее расположение 0-кривых исходной системы.

Результат [4] для пространства R^3 следует из теоремы 2, если положить

$$\Psi(r, \varphi, \psi) = A\psi + a(\varphi, \psi) + f_2(r, \varphi, \psi),$$

где A — действительное число.

ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Э. Рейзинь, Поведение интегральных кривых системы трех дифференциальных уравнений вблизи особой точки, Изв. АН ЛатвССР, № 2 (43), 1951.
2. Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Мир», М., 1970.
3. В. В Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
4. Л. А. Биеза, Один критерий различения в многомерном пространстве, III Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений (тезисы докладов), Самарканд, 1973.

Поступила 26.XI 1973 г.,
после переработки — 24.IV 1974 г.

Одесский государственный университет