УДК 517.944

О классах единственности решения задачи Коши для уравнения с быстро растущими коэффициентами

В. Г. Палюткин

В заметке дано описание классов единственности решения задачи Коши для уравнения вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \tag{1}$$

a — комплексная постоянная, $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$.

В работе [1] были установлены классы единственности такой задачи в предположении, что $q_0(x)$ — вещественная быстро растущая функция и $q_k(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$, «подчинены» $q_0(x)$ (см. ниже условия а) и б)). Эти классы выделялись с помощью некоторых оценок по x из множества решений нормального типа, т. е. определенных при всех $t \geqslant 0$ и растущих по t не быстрее экспоненты.

Здесь показано, что те же оценки пригодны для выделения более широких классов единственности из множества всех решений, каждое из которых определено в произвольно узкой полосе, содержащей ось x.

В дополнении к условиям работы [1] на коэффициенты $q_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, предполагается «усиленная подчиненность» функций $q_k(x)$ функции $q_0(x)$ и отрицательность $q_0(x)$ при больших $|x|$ (условия в) и г)).

Обозначим через Q дифференциальное выражение в правой части уравнения (1) и через Q^+ — сопряженное ему по Лагранжу. Предположим, что коэффициенты в Q удовлетворяют следующим условиям:

а) $q_0(x)$ — вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $q_0(x) \geqslant c > 0$ или $q_0(x) \leqslant -c < 0$ при достаточно больших значениях $|x|$; функции $q_0''|q_0|^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ и $q_0'^2|q_0|^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)} \in L_1(-\infty, -x_0)$, $L_1(x_0, \infty)$ при достаточно большом x_0;

б) $q_k(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$, — комплекснозначные функции такие, что $q_k|q_0|^{-\frac{n-1-k}{n}} \in L_1(-\infty, -x_0)$, $L_1(x_0, \infty)$ при достаточно большом x_0.

Далее через $\operatorname{sign} q_0$ обозначим значение $\operatorname{sign} q_0(x)$ при достаточно больших значениях $|x|$.

С помощью хорошо знакомой методики [2] доказывается, как и в [1], следующая лемма.

Лемма. *Если коэффициенты дифференциального выражения удовлетворяют условиям* а) *и* б), *то уравнение*

$$Qy(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda) \tag{2}$$

имеет n линейно независимых решений $y_k(x, \lambda)$, определенных в области $D = \{(x, \lambda) : \operatorname{sign} \lambda = -\operatorname{sign} q_0, |\lambda| \geqslant c, -\infty < x < \infty\}$ и имеющих вид

$$y_k^{(p)}(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda - q_0(x)}{a}\right)^{-\frac{n-1}{2n} + \frac{p}{n}} (\varepsilon_k^p + \delta_{k,p}(x, \lambda)) \exp \int_0^x w_k(\xi, \lambda)\, d\xi, \tag{3}$$

где $\delta_{k,p}(x, \lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty \cdot \operatorname{sign} q_0$ равномерно по x; $\varepsilon_k = \exp(2\pi i k/n)$, $p, k = 0, 1, \ldots, n-1$;

$$w_k(x, \lambda) = \left|\frac{\lambda - q_0(x)}{a}\right|^{\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{i}{n} \arg \frac{\lambda - q_0(x)}{a} + \frac{2\pi i k}{n}\right).$$

Сохраняя обозначения, принятые в [1], полагаем

$$\mu_j = \lim_{|x| \to \infty} \cos \arg w_j(x, \lambda), \ \mu = \min_{0 \leqslant j \leqslant n-1} |\mu_j|.$$

Заметим, что если λ — вещественно и $\operatorname{sign} \lambda = -\operatorname{sign} q_0$, то $\cos \arg w_j(x, \lambda) = \text{const}$ для достаточно больших $|x|$.

Величина μ зависит от $\arg a$, порядка n выражения Q и $\operatorname{sign} q_0$. Соответствующие формулы приведены в [1].

Теорема. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения Q удовлетворяют условиям* а) *и* б) *и, кроме того, условиям:*

в) *коэффициенты* $q_k(x), k = 0, 1, \ldots, n-1$, *имеют* k *производных, причем* $|q_k^{(k-l)}(x) q_0^{-\frac{n-l}{n}}(x)| \leqslant c,\ l = 1, \ldots, k-1$;

г) $q_0(x) \to -\infty$ *при* $|x| \to \infty$;

д) $\int_{-\infty} |q_0(x)|^{-1+\frac{1}{n}} dx < \infty,\ \int^{\infty} |q_0(x)|^{-1+\frac{1}{n}} dx < \infty.$

Тогда решение $u(x, t)$ задачи Коши

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = Q^+ u(x, t),\ u(x, 0) = 0, \tag{4}$$

удовлетворяющее в полосе $\Pi = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *оценке*

$$|u_x^{(k)}(x, t)| = \frac{\alpha(x)}{(1 + |q_0(x)|)^{\frac{n-1-2k}{2n}}} \exp\left|\mu \int_0^x \left|\frac{q_0(\xi)}{a}\right|^{\frac{1}{n}} d\xi\right|,\ \lim_{|x| \to \infty} \alpha(x) = 0, \tag{5}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, *тождественно равно нулю.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что вместе с $u(x, t)$ условию (5), удовлетворяет и $u_t'(x, t)$. Действительно, функция

$$u_1(x, t) = \int_0^t u(x, t - \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau,$$

которая, в силу равенства $u(x, 0) = 0$, является решением задачи (4), обладает нужными свойствами, если $\varphi(\tau)$ — достаточно гладкая функция, равная нулю в нуле.

Очевидно, $u_1 \equiv 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$.

Пусть $y_k(x, \lambda)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, — решения уравнения (2) вида (3). В силу условий теоремы и сделанных замечаний относительно $u_t'(x, t)$ следующие интегралы сходятся абсолютно и равномерно относительно $t \in [0, T]$:

$$I_{k,s}(t, \lambda) = \int\limits_0^{\infty_k} y_k(x, \lambda)\, u_t^{(s)}(x, t)\, dx,\ s = 0,1, \tag{6}$$

где $\infty_k = -\infty \cdot \operatorname{sign} \mu_k$.

Умножим каждый из интегралов $I_k(t, \lambda) \equiv I_{k,0}(t, \lambda)$ на λ и преобразуем согласно (2). Интегрируя далее нужное число раз по частям и принимая во внимание (4), (5) и условия в) и д), получим:

$$\lambda I_k(t, \lambda) = \frac{dI_k(t, \lambda)}{dt} + R(\bar{y}_k(0, \lambda), \bar{u}(0, t)). \tag{7}$$

Здесь внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, записаны как значения некоторой билинейной формы R в n-мерном пространстве на векторах $\bar{y}_k(0, \lambda) = (y_k(0, \lambda), \ldots, y_k^{(n-1)}(0, \lambda))$, $\bar{u}(0, t) = (u(0, t), \ldots$
$\ldots, u_x^{(n-1)}(0, t))$. Отметим следующее свойство формы R:

$$R((0, 0, \ldots, 0, 1), \bar{u}(0, t)) = (-1)^{n-1} au(0, t). \tag{8}$$

Обозначим теперь через $y(x, \lambda)$ решение уравнения (2) при начальном условии $y^{(p)}(0, \lambda) = \delta_{p,n-1}$, $p = 0, 1, \ldots, n-1$, $\delta_{p,n-1}$ — символ Кронекера. Согласно лемме

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x, \lambda)\, c_k(\lambda).$$

Дифференцируя это равенство $n-1$ раз по x и полагая $x = 0$, получим систему

$$\delta_{p,n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(p)}(0, \lambda)\, c_k(\lambda), p = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Согласно лемме

$$\det \| y_k^{(p)}(0, \lambda) \| = \det \| \varepsilon_k^p + \delta_{k,p}(0, \lambda) \| \prod_{p=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda - q_0(x)}{a} \right)^{-\frac{n-1}{2n} + \frac{p}{n}} \to$$

$$\to \det \| \varepsilon_k^p \| \text{ при } \lambda \to -\infty \cdot \operatorname{sign} q_0. \tag{10}$$

Поэтому систему (9) можно решить относительно $c_k(\lambda)$ при достаточно больших $|\lambda|$, причем

$$c_k(\lambda) = \frac{\det Y(\lambda)}{\det \| y_k^{(p)}(0, \lambda) \|}, \tag{11}$$

где матрица $Y(\lambda)$ получена из $\| y_k^{(p)}(0, \lambda) \|$ заменой в k-м столбце (j, k)-го элемента на $\delta_{n-1,k}$. Из (10) и (11) ясно, что

$$c_k(\lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to -\infty \cdot \operatorname{sign} q_0\ (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{12}$$

Определим функцию

$$I(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\lambda)\, I_k(t, \lambda).$$

Согласно (3), (5) и (6)

$$I(t, \lambda) \to 0 \text{ при } \lambda \to -\infty \cdot \operatorname{sign} q_0. \tag{13}$$

Из (7) — (9) и равенства $u(x, 0) = 0$ следует

$$\frac{dI(t, \lambda)}{dt} = \lambda I(t, \lambda) + (-1)^n a u(0, t), \; I(0, \lambda) = 0. \tag{14}$$

Поэтому

$$I(t, \lambda) = (-1)^n a \exp(\lambda t) \int_0^t \exp(-\lambda s) u(0, s) \, ds \tag{15}$$

и, таким образом, для каждого $t > 0$ функция $I(t, \lambda)$ — целая, экспоненциального типа, ограниченная в левой полуплоскости. Но это свойство противоречит (13), если $I(t, \lambda) \not\equiv 0$, а значит, и $u(0, t) \not\equiv 0$.

Итак, $u(0, t) \equiv 0$. Аналогичным образом можно показать, что $u(x_0, t) \equiv 0$ при любом $x_0 \in (-\infty, \infty)$. Достаточно заметить, что в (3) и (5) в качестве нижнего предела в интегралах можно взять любое $x_0 \in (-\infty, \infty)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остается верной, если в ее формулировке опустить условие г), а задачу (4) заменить следующей:

$$\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} = Q^+ u(x, t), \; u_t^{(k)}(x, 0) = 0 \;\; (k = 0, 1, \ldots, m-1; \; m \geqslant 2).$$

Доказательство почти дословно сохраняется вплоть до вывода уравнения (14), которое заменяется соответствующим уравнением с производной по t порядка $m \geqslant 2$. В этом случае, как нетрудно заметить, решение этого уравнения с нулевыми начальными условиями является неограниченным по λ в любом направлении вещественной оси, что противоречит (13) при любом значении $\operatorname{sign} q_0$.

В заключение выражаю глубокую признательность Ю. М. Березанскому за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Житомирский, Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с быстро растущими коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, № 5, 1967.
2. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», М., 1969.

Поступила 1.VII 1974 г.,
после переработки — 12.XI 1974 г.
Институт математики АН УССР