УДК 517.535.4

О псевдопростоте некоторых мероморфных функций

Г. С. Прокопович

Мероморфную в конечной плоскости функцию $F(z)$ (в дальнейшем такие функции будем называть просто мероморфными) назовем простой (псевдопростой), если из того, что $F(z)$ представляется в виде

$$F(z) = f(g(z)), \tag{1}$$

следует, что либо $f(z)$ — дробно-линейная (рациональная) функция, либо $g(z)$ — линейная функция (многочлен). Пусть $\{a_i\}$ — множество a-точек функции $F(z)$, p_i — порядок a-точки a_i. Если p — наибольший общий делитель чисел p_i, то множество $\{a_i\}$ будем называть p-кратным. Множества 1-кратные будем называть простыми. Говоря «почти все a-точки», будем иметь в виду все a-точки, исключая, возможно, конечное число их.

Для целых функций Одзава [1] и Кимура [2] доказали следующую теорему.

Теорема A. *Пусть $F(z)$ — целая функция нецелого порядка ρ $(1/2 < \rho < \infty)$, нули которой образуют простое множество, лежащее на отрицательной полуоси. Если $n(r) \sim \lambda r^{\rho}$, $\lambda > 0$, где $n(r)$ означает число нулей функции $F(z)$ на сегменте $[-r, 0]$, то $F(z)$ проста.*

Обобщим этот результат, ослабив условия, налагаемые на $F(z)$. А именно, будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — мероморфная функция конечного порядка ρ, $a \in \overline{\mathbf{C}}$ не является пикаровским исключительным значением $F(z)$. Предположим, что почти все a-точки $F(z)$ лежат на некоторой прямой L. Тогда $F(z)$ псевдопроста. Если при этом в представлении (1) $f(z)$ — трансцендентная функция, то $g(z)$ — многочлен не выше второй степени.*

Теорема 2. *Пусть $F(z)$ — мероморфная функция порядка ρ $(1/2 < < \rho < \infty)$,*

$$l_0 = \{z : \arg z = \varphi_0\},\quad l_\infty = \{z : \arg z = \varphi_0 + \theta\}, \tag{2}$$

где $0 \leqslant \theta < \min\left\{\frac{\pi}{\rho},\ 2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right\}$. Пусть нули $F(z)$ образуют бесконечное p-кратное множество и почти все лежат на l_0, а полюсы — q-кратное множество и почти все лежат на $l_0 \cup l_\infty$. Если для некоторой точки $a \in \overline{\mathbf{C}}$ выполняется $\delta(a, F) = 1$, то $F(z)$ — псевдопростая функция, причем в представлении (1) *$f(z)$ является функцией одного из видов*

$$f(z) = A(z - \alpha_1)^m, \tag{I}$$

$$f(z) = A(z - \alpha_2)^{-n}, \tag{II}$$

$$f(z) = A\frac{(z - \alpha_1)^m}{(z - \alpha_2)^n}, \tag{III}$$

где m делит p, n делит q, A, α_1, α_2 — постоянные, причем в случае (III) $\delta(\alpha_1, g) + \delta(\alpha_2, g) = 1$.

Примеры функций $\cos 2\sqrt{z} = (\sqrt{2}\cos\sqrt{z} + 1)(\sqrt{2}\cos\sqrt{z} - 1)$, $\cos\sqrt{z}e^{\cos\sqrt{z}}$ и $(1 + z^2)e^{1+z^2}$ показывают, что в теореме 2 условие $1/2 < \rho < \infty$ и условие существования бесконечного числа нулей у $F(z)$ не могут быть отброшены.

Из теоремы 2 вытекает следующее следствие.

С л е д с т в и е. *Пусть* $F(z)$ — *целая функция порядка* $\rho\,(1/2<\rho<\infty)$, *нули которой составляют бесконечное простое множество на некотором луче, проходящем через начало координат. Тогда* $F(z)$ — *простая функция.*

Это следствие содержит теорему А.

Утверждения теорем 1 и 2 вытекают из следующих результатов.

Т е о р е м а Б (Эдрей [3]). *Пусть* $g(z)$ — *целая функция. Предположим, что существует такая последовательность* $\{w_\nu\}$, $w_\nu\to\infty$ *при* $\nu\to\infty$, *что все корни уравнений* $g(z)=w_\nu$ *действительны. Тогда* $g(z)$ — *многочлен не выше второй степени.*

Т е о р е м а В (И. В. Островский [4, гл. VI, § 4]). *Пусть* $g(z)$ — *мероморфная функция порядка* ρ, *почти все нули и полюсы которой лежат на двух лучах* (2), *где* $0\leqslant\theta<\pi$. *Тогда, если для некоторой точки* $a\,(a\neq 0,\ \infty)$ *выполняется* $\delta(a,\ g)\geqslant 1-\cos(\rho\theta/2)$, *то не может иметь места соотношение* $\dfrac{\pi}{2\pi-\theta}<\rho<\dfrac{\pi}{\theta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Предположим, что функция $F(z)$ допускает представление (1) и $f(z)$ — трансцендентная функция. Тогда $g(z)$ — целая функция. Не ограничивая общности, можно считать, что L — действительная ось. Так как a не является пикаровским исключительным значением $F(z)$, то $\{w_\nu\}$ — последовательность a-точек $f(z)$ — стремится к ∞. Пусть $z_{\nu k}$, $1\leqslant k\leqslant k_\nu$, $k_\nu\leqslant\infty$, — корни уравнения $g(z)=w_\nu$. Исключим из последовательности $\{w_\nu\}$ те числа, при которых хотя бы один корень $z_{\nu k}$ лежит вне L. Так как число таких корней конечно, то получим новые последовательности $\{w'_\nu\}$ и $\{z'_{\nu k}\}$ такие, что $g(z'_{\nu k})=w'_\nu$, $z'_{\nu k}\in L$. Но тогда по теореме Б $g(z)$ — многочлен не выше второй степени.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Функция $F(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 с $a=0$. Следовательно, если в представлении (1) $f(z)$ — трансцендентная функция, то $g(z)$ — многочлен степени $n\leqslant 2$. Предположим, что $n=2$. Тогда существует последовательность $\{w_\nu\}$, $w_\nu\to\infty$ при $\nu\to\infty$, такая, что $f(w_\nu)=0$, $g(z_{\nu k})=w_\nu$, $k=1,2$. Но тогда при соответствующем выборе $z_{\nu 1}$ и $z_{\nu 2}$

$$z_{\nu k}=(c+o(1))\,|w_\nu|^{\frac{1}{2}}e^{k\pi i},\ \ \nu\to\infty,\ \ c=\text{const},$$

а это противоречит условию, что почти все точки $z_{\nu k}$ лежат на l_0. Следовательно, $n=1$.

Рассмотрим случай, когда $f(z)$ — рациональная функция. Пусть

$$F(z)=A\frac{\{g(z)-\alpha_1\}\ldots\{g(z)-\alpha_m\}}{\{g(z)-\alpha_{m+1}\}\ldots\{g(z)-\alpha_{m+n}\}},$$

где $g(z)$ — мероморфная функция, $A,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+n}$ — постоянные.

По условиям теоремы $\theta<\min\left\{\dfrac{\pi}{\rho},\ 2\pi-\dfrac{\pi}{\rho}\right\}$, т. е. $\dfrac{\pi}{2\pi-\theta}<\rho<\dfrac{\pi}{\theta}$.

Применяя к функции $F(z)$ теорему В, получаем, что дефектным значением $F(z)$ может быть только 0 или ∞. Пусть $\delta(0,F)=1$. Тогда: а) $0\leqslant m<n$, $\delta(\infty,g)=1$ и почти все полюсы функции $g(z)$ лежат на l_0 или б) одно из чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ является дефектным значением $g(z)$. Это следует из того, что $T(r,F)=\max(m,n)\,T(r,g)+O(1)$ [4, стр. 47] и $N(r,F)=\sum\limits_{j=1}^{m}N(r,\alpha_j,g)+$ $+(n-m)^+N(r,\infty,g)+O(1)$ (можно было бы сослаться и на [5]).

Исследуем случаи а) и б) в отдельности.

а) Предположим, что среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n}$ существуют два различных ($\alpha_i \neq \alpha_j$). Рассмотрим функцию

$$h(z) = \frac{g(z) - \alpha_i}{g(z) - \alpha_j}. \tag{3}$$

Почти все нули и полюсы $h(z)$ лежат на $l_0 \cup l_\infty$. Применяя к $h(z)$ теорему B и учитывая, что порядок $h(z)$ равен ρ, получим, что дефектным значением $h(z)$ может быть только 0 или ∞. Однако $\delta(\infty, g) = 1$ и поэтому из (3) следует, что $\delta(1, h) = 1$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m+n}$, и поскольку не может иметь место равенство $\alpha_i = \alpha_j$, если $1 \leqslant i \leqslant m$, $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$, то $m = 0 < n$ и $F(z) = A\{g(z) - \alpha\}^{-n}$. Из q-кратности множества полюсов $F(z)$ следует, что n делит q (II).

б) Пусть $\delta(\alpha_k, g) = 1$ при некотором k $(1 \leqslant k \leqslant m)$. Рассмотрим функцию $h(z)$ вида (3), где $1 \leqslant i \leqslant m$, $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$. Функция $h(z)$ удовлетворяет условиям теоремы B с $a = \dfrac{\alpha_k - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_j}$. Применяя к $h(z)$ теорему B и учитывая, что $\alpha_j \neq \alpha_k$, получаем равенство $\alpha_i = \alpha_k$, и поскольку i—произвольное число из множества $\{1, 2, \dots, m\}$, то $\alpha_i = \alpha_k$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Предположим, что существуют α_i и α_j, $m+1 \leqslant i \leqslant m+n$, $m+1 \leqslant j \leqslant m+n$, $\alpha_i \neq \alpha_j$. Еще раз рассмотрев функцию $h(z)$ вида (3), получим, что либо $\alpha_i = \alpha_k$, либо $\alpha_j = \alpha_k$, что невозможно. Следовательно,

$$F(z) = A\frac{\{g(z) - \alpha_k\}^m}{\{g(z) - \alpha_{m+1}\}^n}.$$

Из p-кратности множества нулей и q-кратности множества полюсов $F(z)$ следует, что m делит p и n делит q, т. е. $f(z)$ — функция вида (III).

В случае, когда дефектным значением функции $F(z)$ является не 0, а ∞, рассматривая функцию $F_1(z) = \{F(z)\}^{-1}$, получим, что функция $f(z)$ имеет вид (I) или (III).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ozawa, On prime entire functions, II, Kōdai Math. Sem. Rep., **22**, 1970, 309—312.
2. S. Kimura, On prime entire functions, Kōdai Math. Sem. Rep., **24**, 1972, 28—33.
3. A. Edrei, Meromorphic functions with three radially distributed values, Trans. Amer. Math. Soc., **78**, 1955, 276—293.
4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, «Наука», 1970.
5. G. Calugareano, Sur les valeurs exceptionnelles, au sens de M. Picard et de M. Nevanlinna, des fonctions meromorphes, C. r. Acad. sci., **195**, 1932, 22—23.

Поступила 12.III 1973 г.,
после переработки — 5.XI 1973 г.

Львовское отделение Института экономики АН УССР