УДК 517.948.32:517.544

Краевая задача со сдвигом для двух функций на римановой поверхности с краем в классе обобщенных функций

С. А. Яценко

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная ориентируемая риманова поверхность рода $h \geqslant 0$ с краем $\partial\mathfrak{M}$, состоящим из $(\rho+1)$ непересекающихся замкнутых кривых $L_0, L_1, \ldots, L_\rho$ и ориентированным так, что при обходе $\partial\mathfrak{M}$ в положительном направлении открытая поверхность $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ остается слева. Предполагается, что поверхность $\mathfrak{M}$ снабжена стандартной конформной структурой [1]. При таком выборе конформной структуры край $\partial\mathfrak{M}$ будет заведомо бесконечно гладким. Зададим на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ два дивизора D_1 и D_2.

2. Пусть $S_{(g)} = \{g(Q)\}$ и $S_{(dh)} = \{dh(Q)\}$, $Q \in \partial\mathfrak{M}$ — пространства бесконечно дифференцируемых функций и дифференциалов (основные пространства) [2], а $S'_{(dh)} = \{f\}$ — пространство обобщенных в смысле Соболева — Шварца функций, действие в которых задается через сопряженную операцию в основном пространстве

$$(Kf, dh(Q)) = (f, K^* dh(Q)). \tag{1}$$

3. Пусть $\alpha(Q)$ — изменяющий ориентацию гомеоморфизм края $\partial\mathfrak{M}$ на себя (сдвиг). Будем предполагать, что сдвиг $\alpha(Q)$ отображает кривые L_j на себя или на другие кривые и $0 \neq d\alpha(Q) \in S_{(dh)}$.

В пространстве обобщенных функций введем:

а) сдвиг α согласно равенству

$$(f[\alpha], dh(Q)) = (f, dh[\beta(Q)]), \tag{2}$$

где $\beta(Q)$ удовлетворяет условию $\beta[\alpha(Q)] \equiv Q$;

б) аналоги предельных значений мероморфных на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ функций, кратных соответственно дивизорам D_1^{-1} и D_2^{-1}.

Определение 1. Две обобщенные функции $f_{D_1^{-1}}, f_{D_2^{-1}} \in S'_{(dh)}$ называются кратными дивизорам D_1^{-1}, D_2^{-1}, если для любых двух мероморфных на поверхности $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ дифференциалов $d\varphi(P)$ и $d\psi(P)$, предельные значения которых $d\varphi(Q)$, $d\psi(Q) \in S_{(dh)}$ и кратных соответственно дивизорам D_1 и D_2, выполняются равенства

$$(f_{D_1^{-1}}, d\varphi(Q)) = 0, \tag{3}$$

$$(f_{D_2^{-1}}, d\psi(Q)) = 0. \tag{4}$$

4. Сформулируем краевую задачу: найти все обобщенные функции $f_{D_1^{-1}}, f_{D_2^{-1}} \in S'_{(dh)}$ по условию

$$f_{D_1^{-1}}[\alpha] = G(Q) f_{D_2^{-1}} + f, \tag{5}$$

где $0 \neq G(Q) \in S_{(g)}$, а f — произвольная функция из $S'_{(dh)}$.

Применяя метод локально конформного склеивания [3], сведем задачу (5) к равносильной ей краевой задаче Римана на замкнутой римановой поверхности в классе обобщенных функций. Для этого рассмотрим два экземпляра поверхности $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, на которых конформная структура сохраняется, и будем рассматривать гомеоморфизм края $\partial\mathfrak{M}_2$ на $\partial\mathfrak{M}_1$. На множестве $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ введем соотношение эквивалентности следующим образом:

а) если точка $P \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} (\mathfrak{M}_k/\partial\mathfrak{M}_k)$, то она считается эквивалентной самой себе;

б) если точка $Q \in \partial\mathfrak{M}_2$, то считаются эквивалентными точки Q и $\alpha(Q) \in \partial\mathfrak{M}_1$;

в) если точка $Q \in \partial\mathfrak{M}_1$, то считаются эквивалентными точки Q и $\beta(Q) \in \partial\mathfrak{M}_2$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех классов эквивалентности и пусть σ: $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \xrightarrow{\text{на}} \mathfrak{R}$ — фактор-отображение, которое ставит в соответствие каждой точке множества $\bigcup\limits_{k=1}^{2} \mathfrak{M}_k$ ее класс эквивалентности. Снабдив $\mathfrak{R}$ фактор-топологией, можно превратить $\mathfrak{R}$ в топологическое пространство со следующими свойствами:

а) $\mathfrak{R}$ — замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $2h + \rho$;

б) на $\mathfrak{R}$ существует единственная конформная структура, такая, что сужение фактор-отображения σ на $\bigcup\limits_{k=1}^{2} (\mathfrak{M}_k/\partial\mathfrak{M}_k)$ есть конформный гомеоморфизм;

в) образ $\sigma\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2} \partial\mathfrak{M}_k\right)$ состоит из $(\rho + 1)$ непересекающихся замкнутых бесконечно гладких кривых и ориентирован так, что при обходе в положительном направлении поверхность $\sigma(\mathfrak{M}_1/\partial\mathfrak{M}_1)$ остается слева, а поверхность $\sigma(\mathfrak{M}_2/\partial\mathfrak{M}_2)$ — справа. Обозначим точки поверхности $\mathfrak{R}/\Gamma$ через p, а точки контура Γ через q. Далее, все объекты, связанные с левой стороной контура Γ, обозначаем «+», а объекты, связанные с правой стороной контура, — знаком «—»;

г) дивизоры $D_1, D_2 \in \mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ переходят в дивизоры $\widetilde{D}_1 = \sigma(D_1)$, $\widetilde{D}_2 = \sigma(D_2)$ с сохранением кратностей всех точек в образе;

д) сохраняются дифференциальные свойства основных пространств $\widetilde{S}_{(g)} = \{g[\sigma^{-1}(q)]\} = \{\widetilde{g}(q)\}$, $\widetilde{S}_{(dh)} = \{dh[\sigma^{-1}(q)]\} = \{d\widetilde{h}(q)\}$, где $q \in \Gamma \subset \mathfrak{R}$;

е) для любого кусочно-мероморфного дифференциала $dH(p)$ на $\mathfrak{R}/\Gamma$, кратного дивизору $\widetilde{D}_1\widetilde{D}_2$, с предельными значениями $dH^{\pm}(q) \in S_{(dh)}$ выполняются равенства

$$dH^{+}(p) = d\varphi[\sigma^{-1}(p)] = d\varphi(P),\ P \in \mathfrak{M}_1/\partial\mathfrak{M}_1,\ D_1/(d\varphi),$$
$$dH^{-}(p) = d\psi[\sigma^{-1}(p)] = d\psi(P),\ P \in \mathfrak{M}_2/\partial\mathfrak{M}_2,\ D_2/(d\psi). \tag{6}$$

Устремив в равенствах (6) $p \to q$, будем иметь

$$dH^{+}(q) = d\varphi[\sigma^{-1}(q)] = d\varphi[\alpha(Q)], \quad dH^{-}(q) = d\psi[\sigma^{-1}(q)] = d\psi(Q). \tag{7}$$

Определение 2. Две обобщенные функции из $S'_{(dh)}$ назовем функциями типа «$+$» и типа «$-$» — f^{+}, f^{-}, если для любого дифференциала $dH(p)$ со свойствами, указанными в условии e), выполняются равенства

$$(f^{\pm}, dH^{\pm}(q)) = 0. \tag{8}$$

Покажем, что $f_{D_1^{-1}}[\alpha] = f^{+}$, $f_{D_2^{-1}} = f^{-}$. Действительно, учитывая (7), (2) — (4), имеем

$$(f_{D_1^{-1}}[\alpha], dH^{+}(q)) = (f_{D_1^{-1}}[\alpha], d\varphi[\alpha(Q)]) = (f_{D_1^{-1}}, d\varphi\{\beta[\alpha(Q)]\}) =$$
$$= (f_{D_1^{-1}}, d\varphi(Q)) = 0, \quad (f_{D_2^{-1}}, dH^{-}(q)) = (f_{D_2^{-1}}, d\psi(Q)) = 0.$$

Следовательно, задача (5) переходит в краевую задачу Римана на замкнутой римановой поверхности в классе обобщенных функций

$$f^{+} = \widetilde{G}(q) f^{-} + f, \quad G(Q) = G[\sigma^{-1}(q)] = \widetilde{G}(q). \tag{9}$$

5. Используя методику [4] для решения задачи (9), выпишем основные для нее результаты. Пусть $\widetilde{S}^{*}_{(dh)} = \{d\widetilde{h}^{*}(q)\} = \left\{ d\widetilde{h}(q) : \int\limits_{\Gamma} \Phi_k^{+}(q)\, d\widetilde{h}(q) = 0 \right\}$, где $\{\Phi_k(p)\}_{k=1}^{l}$ — линейно независимые решения краевой задачи Римана на поверхности $\mathfrak{R}$ в пространстве основных функций

$$\Phi^{+}(q) = \widetilde{G}(q)\, \Phi^{-}(q), \quad \widetilde{D}_1^{-1}\widetilde{D}_2^{-1}/(\Phi). \tag{10}$$

Пусть $\{d\Psi_k(p)\}_{k=1}^{l'}$ — линейно независимые решения краевой задачи Римана на $\mathfrak{R}$ в пространстве основных дифференциалов

$$d\Psi^{+}(q) = \frac{1}{\widetilde{G}(q)}\, d\Psi^{-}(q) + d\widetilde{h}(q),\ \widetilde{D}_1\widetilde{D}_2/(d\Psi). \tag{11}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы задача* (9) *была разрешима, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$(f, d\Psi_k^{+}(q)) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l'. \tag{12}$$

Если эти условия выполнены, то решение дается следующими функциями:

1) $\widetilde{S}^{*}_{(dh)} = \widetilde{S}_{(dh)}$,

$$(f^{+}, d\widetilde{h}(q)) = -\left(f, \frac{d\Psi_0^{-}(q)}{\widetilde{G}(q)}\right), \ (f^{-}, d\widetilde{h}(q)) = -\left(f, \left[\frac{dh(q)}{\widetilde{G}(q)}\right]_0^{+}\right) \tag{13}$$

(*здесь* $d\Psi_0^{-}(q)$ — *предельное значение частного решения задачи* (11), *а* $\left[\dfrac{d\widetilde{h}(q)}{\widetilde{G}(q)}\right]_0^{+}$ — *предельное значение частного решения задачи* (11), *в которой* $d\widetilde{h}(q)$ *заменено на* $\dfrac{d\widetilde{h}(q)}{\widetilde{G}(q)}$);

2) $\widetilde{S}^{*}_{(dh)} \subset \widetilde{S}_{(dh)}$,

$$\begin{gathered}(f^{+}, d\widetilde{h}(q)) = -\left(f, \frac{d\dot{\Psi}_0^{-}(q)}{\widetilde{G}(q)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{l} C_k \Phi_k^{+}(q), d\widetilde{h}(q)\right),\\ (f^{-}, d\widetilde{h}(q)) = -\left(f, \frac{d\dot{\Psi}_0^{-}(q)}{\widetilde{G}(q)}\right) - \left(f, \frac{d\widetilde{h}(q)}{\widetilde{G}(q)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{l} C_k \Phi_k^{-}(q), d\widetilde{h}(q)\right)\end{gathered} \tag{14}$$

(здесь $d\dot{\Psi}_0^{-}(q)$ *— предельное значение частного решения задачи* (11), *в которой в качестве свободного члена берется* $d\widetilde{h}^{*}(q)$; C_k *— произвольные постоянные, а числа* l *и* l' *связаны соотношением*

$$l - l' = \operatorname{Ind} \widetilde{G}(q) + \operatorname{Ord} \widetilde{D}_1 + \operatorname{Ord} \widetilde{D}_2 - 2h - \rho + 1). \tag{15}$$

6. Сформулируем в терминах основных результатов задачи (9) результаты задачи (5).

Теорема 2. *Для того, чтобы задача* (5) *была разрешимой, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$(f, d\Psi_k^{+}\{\sigma[\alpha(Q)]\}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l'. \tag{16}$$

Если эти условия выполнены, то решение дается формулами

$$\begin{gathered}(f_{D_1-1}, dh(Q)) = -\left(f, \frac{d\Psi_0^{-}\{\beta[\sigma(Q)]\}}{G(Q)}\right),\\ (f_{D_2-1}, dh(Q)) = -(f, [dh[\alpha(Q)]/G[\alpha(Q)]]_0^{+}),\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}(f_{D_1-1}, dh(Q)) = -\left(f, \frac{d\dot{\Psi}_0^{-}\{\beta[\sigma(Q)]\}}{G(Q)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{l} C_k \Phi_k^{+}\{\sigma[\alpha(Q)]\}, dh(Q)\right),\\ (f_{D_2-1}, dh(Q)) = -\left(f, \frac{d\dot{\Psi}_0^{-}\{\beta[\sigma(Q)]\}}{G(Q)}\right) - \left(f, \frac{dh(Q)}{G(Q)}\right) + \\ + \left(\sum_{k=1}^{l} C_k \Phi_k^{-}\{\sigma[\alpha(Q)]\}, dh(Q)\right).\end{gathered} \tag{18}$$

Числа l *и* l' *связаны соотношением*

$$l - l' = \operatorname{Ind} G(Q) + \operatorname{Ord} D_1 + \operatorname{Ord} D_2 - 2h - \rho + 1. \tag{19}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960.
2. С. А Яценко, Краевая задача Сохоцкого на замкнутой римановой поверхности в пространствах обобщенных функций и дифференциалов, УМЖ, т. 23, № 6, 1971.
3. Э. И. Зверович, Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях, Сиб. матем. ж., т. 7, № 4, 1966.
4. С. А. Яценко, Краевая задача Римана в пространствах обобщенных функций и дифференциалов на замкнутой римановой поверхности, Сб. Краевые задачи математической физики, Изд. Института математики АН УССР, К., 1971.

Поступила 11.IX 1974 г.

Одесский инженерно-строительный институт