УДК 517.948

Об одном классе линейных уравнений с функциональными производными

И. М. Ковальчик

В данной статье рассматриваются линейные уравнения с функциональными производными, коэффициенты которых мало отличаются от постоянных. Доказывается теорема являющаяся некоторым аналогом теоремы Флоке, а также оценивается погрешность при замене точного решения приближенным. Соответствующие результаты для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений были получены в работе [1], а для многомерных дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, содержащих производную отображения одного конечномерного пространства в другое, — в статье [2].

Пусть X — нормированное пространство, $\mathbf{R}$ — числовая прямая, $l(x)$— отображение X в $\mathbf{R}$, а $d^k l(x, h)$ — k-й сильный дифференциал функционала $l(x)$ в точке $x \in X$.

Сильная k-я производная функционала $I(x)$ определяется с помощью равенства

$$d^k I(x, h) = I^{(k)}_{x\dots x}\,(h, \dots, h) \qquad (k = \overline{1, n}).$$

Если X — пространство функций и

$$I^{(k)}_{x\dots x}(h, \dots, h) = \int_a^b \overset{(k)}{\dots} \int_a^b I^{(k)}_{x(t_1)\dots x(t_k)} h(t_1) \dots h(t_k)\, dt_1 \dots dt_k \qquad (k = \overline{1, n}),$$

то $I^{(k)}_{x(t_1)\dots x(t_k)}$ называется функциональной производной порядка k от функционала $I(x)$ по x, вычисленной в точке $t_1, \dots, t_k$ и обозначается символом $\dfrac{\delta^k I(x)}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_k)}$.

При этом последнее равенство можно понимать и в смысле обобщенных функций, т. е. рассматривать функциональную производную как обобщенную функцию аргументов $t_1, \dots, t_k$ (подробности см. в статьях [3, 4]).

Рассмотрим линейное уравнение с функциональными производными

$$\frac{\delta^n I(x)}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} + f_1(x, t_1, \dots, t_n) \frac{\delta^{n-1} I(x)}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_{n-1})} + \dots$$

$$\dots + f_{n-1}(x, t_1, \dots, t_n) \frac{\delta I(x)}{\delta x(t_1)} + f_n(x, t_1, \dots, t_n)\, I(x) = 0, \tag{1}$$

где $x \in D \subset X$, $t_1, \dots, t_n \in [a, b] \subset \mathbf{R}$.

Уравнение (1) называется вполне разрешимым в некоторой области $D \subset X$, если для $\forall x_0 \in D$ и для любых начальных условий найдется такая открытая окрестность Q точки x_0, что существует единственное решение уравнения (1), определенное в Q и удовлетворяющее начальным условиям

$$I(x_0) = I_0, \quad \frac{\delta^k I(x_0)}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_k)} = I_0(t_1, \dots, t_k) \qquad (k = \overline{1, n-1}).$$

Будем считать, что уравнение (1) вполне разрешимо в области D.

Пусть коэффициенты данного уравнения имеют следующий вид:

$$f_k(x, t_1, \dots, t_n) = a(t_{n-k+1}) \dots a(t_n)\, [p_k + \varepsilon q_k(x)] \qquad (k = \overline{1, n}),$$

где $p_k = \mathrm{const}$, $a(t)$ — непрерывная функция, ε — малый числовой параметр: $|\varepsilon| < |\varepsilon_0|$, а

$$q_k(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \bar{q}_{\nu k} \exp\left[i\nu \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt \right] \qquad (\bar{q}_{\nu k} = \mathrm{const},\ k = \overline{1, n}). \tag{2}$$

Будем говорить, что функционал $q_k(x)$ принадлежит классу S, если он допускает представление (2).

Специфический вид коэффициентов $f_k(x, t_1, \dots, t_n)$ $(k = \overline{1, n})$ естественно связан с условиями полной разрешимости данного уравнения. Так как предполагается, что функционалы $q_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ имеют вид (2), то условия полной разрешимости выполняются. Для проверки этого факта достаточно свести уравнение (1) к системе уравнений первого порядка, полная разрешимость которой обеспечивается теоремой Фробениуса [5]. Впрочем, для наших целей достаточно просто предполагать, что уравнение (1) вполне разрешимо.

Пусть

$$P\left(a(t), \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) \equiv \frac{\delta^n}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_n)} + p_1 a(t_n) \frac{\delta^{n-1}}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1})} + \ldots$$

$$\ldots + p_{n-1} a(t_2) \ldots a(t_n) \frac{\delta}{\delta x(t_1)} + p_n a(t_1) \ldots a(t_n),$$

$$Q\left(a(t), x, \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) \equiv a(t_n) q_1(x) \frac{\delta^{n-1}}{\delta x(t_1) \ldots \delta x(t_{n-1})} + \ldots$$

$$\ldots + a(t_2) \ldots a(t_n) q_{n-1}(x) \frac{\delta}{\delta x(t_1)} + a(t_1) \ldots a(t_n) q_n(x)$$

и

$$P\left(1, \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) = P_1\left(\frac{\delta}{\delta x(t)}\right), \quad Q\left(1, x, \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) = Q_1\left(x, \frac{\delta}{\delta x(t)}\right).$$

В этих обозначениях уравнение (1) запишется следующим образом:

$$P\left(a(t), \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) I(x) = -\varepsilon Q\left(a(t), x, \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) I(x). \tag{3}$$

Введем еще «характеристическое уравнение»

$$P_1(k) \equiv k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0. \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Формальное решение уравнения* (3) *имеет вид*

$$I(x) = A(x) \exp\left[\rho \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt\right], \tag{5}$$

где функционал $A(x)$ *и число* ρ *допускают формальное представление в виде рядов*

$$A(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A_k(x), \quad \rho = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k,$$

в первом из которых коэффициенты $A_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *принадлежат классу* S, *а во втором* ρ_0 *равно одному из корней уравнения* (4), *все корни которого по предположению имеют различные действительные части.*

Доказательство. Подставим выражение (5) в уравнение (3):

$$P\left(a(t), \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)\left\{A(x) \exp\left[\rho \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt\right]\right\} =$$

$$= -\varepsilon Q\left(a(t), x, \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)\left\{A(x) \exp\left[\rho \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt\right]\right\}.$$

Последнее перепишется следующим образом:

$$P\left(a(t), \rho a(t) + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) A(x) = -\varepsilon Q\left(a(t), x, \rho a(t) + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right) A(x)$$

или

$$P\left(a(t), a(t)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\rho_k + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k(x)\right] =$$

$$= -\varepsilon Q\left(a(t), x, a(t)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\rho_k + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k(x)\right].$$

Дальше приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε. Приравнивая выражения при ε^0, имеем

$$P\left(a(t), \rho_0 a(t) + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)1 = a(t_1)\ldots a(t_n)P_1(\rho_0) = 0.$$

Приравняв коэффициенты при ε, находим, что

$$P\left(a(t), \rho_0 a(t) + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)A_1(x) + \rho_1 a(t_1)\ldots a(t_n)P_1'(\rho_0) =$$

$$= -Q\left(a(t), x, \rho_0 a(t) + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)1$$

или

$$P\left(a(t), \rho_0 a(t) + \frac{\delta}{\delta x(t)}\right)A_1(x) = -a(t_1)\ldots a(t_n)[\rho_1 P_1'(\rho_0) + Q_1(x, \rho_0)]. \qquad (6)$$

Так как $Q_1(x, \rho_0) \in S$, то можно записать

$$-Q(x, \rho_0) = \sum_{\mu} C_\mu \exp\left[i\mu\int_a^b a(t)\,x(t)\,dt\right].$$

Уравнение (6) будет удовлетворяться, если положить

$$A_1(x) = \sum_{\mu\neq 0}\frac{C_\mu \exp\left[i\mu\int_a^b a(t)\,x(t)\,dt\right]}{P_1(\rho_0 + i\mu)} \text{ и } \rho_1 = \frac{C_0}{P_1'(\rho_0)}.$$

Так как корни характеристического уравнения имеют различные вещественные части, то знаменатели в обоих выражениях в нуль не обращаются.

Таким образом, коэффициент $A_1(x)$ формального ряда для функционала $A(x)$ принадлежит классу S.

Потом приравниваются коэффициенты при ε^2 и т. д., т. е. нужно фактически повторить конец доказательства теоремы II из монографии [1].

В то время как для построения общего решения уравнения (1) в виде формального ряда метод, используемый в работе [1], применим, то для оценки погрешности m-го приближения эту методику применять нельзя.

Под m-м приближением будем понимать функционал

$$I_m(x) = \left[1 + \sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k A_k(x)\right]\exp\left[\int_a^b a(t)\,x(t)\,dt\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\rho_k\right].$$

Теорема 2. *Приближенное решение $I_m(x)$ уравнения в функциональных производных* (1), *переменные части коэффициентов которого при-*

надлежат классу S, и формальное решение $I(x)$ этого же уравнения при достаточно малом $|\varepsilon|$ связаны соотношением

$$I(x) - I_m(x) = O\left(|\varepsilon|^{m+1} \exp\left[-\lambda \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt\right]\right),$$

где λ — постоянное число, равное половине наименьшей из абсолютных величин действительных частей корней уравнения (4).

Доказательство. Сведем уравнение в функциональных производных (1) к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению и запишем, используя результаты из [1], его решение в виде формального ряда. Возникает вопрос, нельзя ли было сразу применить подобную процедуру при доказательстве теоремы 1. Можно показать, что при построении общего решения уравнения в функциональных производных* методом сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям можно этого решения и не получить. Поэтому нужно проверить, что найденный функционал действительно является общим решением рассматриваемого уравнения.

Пусть

$$x_s = sx \ [0 \leqslant s \leqslant 1], \quad I(x_s) = z(s),$$

$$l = \int_a^b a(t)\, x(t)\, dt, \quad q_k(x_s) = q_k^*(s) \qquad (k = \overline{1, n};\ s \in [0, 1]).$$

В уравнении (1) вместо x везде нужно подставить x_s, умножить обе части полученного уравнения на $\prod_{j=1}^{n} [x(t_j)]$ и проинтегрировать по $t_1, \ldots t_n$, учитывая, что

$$\frac{d^k I(x_s)}{\partial s^k} = \int_a^b \overset{(k)}{\cdots} \int_a^b \frac{\delta^k I(x_s)}{\delta x_s(t_1) \ldots \delta x_s(t_k)} \prod_{j=1}^{k} [x(t_j)\, dt_j].$$

Тогда получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n z}{ds^n} + [p_1 + \varepsilon q_1^*(s)]\, l \frac{d^{n-1} z}{ds^{n-1}} + \ldots + [p_{n-1} + \varepsilon q_{n-1}^*(s)]\, l^{n-1} \frac{dz}{ds} +$$

$$+ [p_n + \varepsilon q_n^*(s)]\, l^n z = 0.$$

Если произвести замену независимой переменной по формуле $\tau = sl$, то получим

$$\frac{d^n z}{d\tau^n} + [p_1 + \varepsilon q_1^*(\tau)] \frac{d^{n-1} z}{d\tau^{n-1}} + \ldots + [p_{n-1} + \varepsilon q_{n-1}^*(\tau)] \frac{dz}{d\tau} +$$

$$+ [p_n + \varepsilon q_n^*(\tau)]\, z = 0.$$

Решение данного уравнения на основании результатов из [1] имеет вид

$$z(\tau) = \left[1 + \varepsilon \sum_{\mu \neq 0} C_\mu \frac{e^{i\mu\tau}}{P_1(\rho_0 + i\mu)} + \ldots\right] \exp\left\{\tau \left[\rho_0 + \frac{C_0}{P_1'(\rho_0)} + \ldots\right]\right\}.$$

---

* Определение такое же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом,

$$I(x)=\left\{1+\varepsilon\sum_{\mu\neq 0}C_\mu\frac{\exp\left[i\mu\int\limits_a^b a(t)\,x(t)\,dt\right]}{P_1(\rho_0+i\mu)}+\dots\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\int\limits_a^b a(t)\,x(t)\,dt\left[\rho_0+\frac{C_0}{P_1'(\rho_0)}+\dots\right]\right\},$$

что совпадает с полученным в теореме 1 выражением. При этом коэффициенты данного ряда в силу условия полной разрешимости те же, что и в ряде (5).

Ограничив в ряде для обыкновенного дифференциального уравнения бесконечное суммирование суммой m первых членов, получим m-е приближение решения данного уравнения, которое обозначим через $z_m(s)$.

При достаточно малом $|\varepsilon|$, как следует из [1],

$$z(s)-z_m(s)=O(|\varepsilon|^{m+1}e^{-\lambda ls}).$$

Ясно, что $I_m(x_s)=z_m(s)$.

Полагая $s=1$, окончательно находим

$$I(x)-I_m(x)=O\left(|\varepsilon|^{m+1}\exp\left[-\lambda\int\limits_a^b a(t)\,x(t)\,dt\right]\right).$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. З. Штокало, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, К., 1960.
2. А. И. Перов, О многомерных линейных дифференциальных уравнениях с почти периодическими коэффициентами, УМЖ, т. 19, № 2, 1967.
3. В. И. Авербух и О. Г. Смолянов, Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах, УМН, т. 22, вып 6, 1967.
4. Ю. Л. Далецкий, Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними дифференциальные уравнения, УМН, т. 22, вып. 4, 1967.
5. Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, ИЛ, М., 1964.

Поступила 24.IV 1974 г.

Львовский политехнический институт