

Параметрически возбуждаемые колебания стержней при нелинейном законе упругости

Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, Н. Тургунов

В данной статье при помощи асимптотических методов Крылова — Боголюбова исследуются параметрические колебания призматических стержней с учетом геометрической и физической нелинейностей.

1. Пусть призматический стержень длиной l шарнирно опертый обоим концам (причем один конец $x = 0$ неподвижен, а другой конец $x = l$ подвижен) подвергается действию продольной периодической силы $P(t) = P_0 + P_1 \cos vt$ (рис. 1). Предположим, что ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью Ox , а оси симметрии поперечных сечений параллельны осям Oy и Oz .

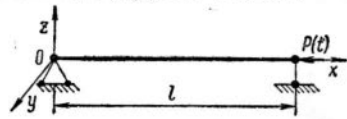


Рис. 1.

Используя зависимость между продольным напряжением σ_x и продольным удлинением ε_x в виде [1].

$$\sigma_x = E(1 + \mu \varepsilon_x^2) \varepsilon_x, \quad \mu = -a_3 E^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ — искомые упругие перемещения точек стержня в направлении осей Ox и Oz ; E — модуль упругости; $a_3 = -2 E \gamma_2 / 27 G^3$ — постоянный множитель, определяющий степень отклонения от линейного закона Гука; G — модуль сдвига; γ_2 — интенсивность касательных напряжений, задачу о динамической устойчивости рассматриваемого стержня в нелинейной постановке с учетом нелинейного затухания сводим к ре-

шению нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[EF(1 + \mu \varepsilon_{x0}^2) \varepsilon_{x0} + 3\mu EJ_0 \varepsilon_{x0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[EF(1 + \mu \varepsilon_{x0}^2) \varepsilon_{x0} + 3\mu EJ_0 \varepsilon_{x0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} - EJ_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \mu E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \\ & \times \left[J_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 + 3J_0 \varepsilon_{x0}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - (\alpha_0 + \alpha_1 w^2) \frac{\partial w}{\partial t} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

при нелинейных краевых условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$\left[EF(1 + \mu \varepsilon_{x0}^2) \varepsilon_{x0} + 3\mu EJ_0 \varepsilon_{x0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{x=l} = -P(t),$$

$$w(l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ — удлинение срединного волокна стержня; m — масса единицы длины стержня; F — площадь поперечного сечения стержня; $J_0 = \int_F z^2 dydz$; $J_2 = \int_F z^4 dydz$ — моменты инерции поперечного сечения стержня; α_0 и α_1 — константы, определяемые из опыта [2].

Систему (3) можно упростить и привести к одному дифференциальному уравнению относительно $w(x, t)$, принимая $|\mu_t| \ll |w_t|$. Это допущение является обычным в прикладной теории колебаний и соответствует пренебрежению продольными силами инерции $m u_{tt}$ [1, 2]. Отбрасывая член с $m u_{tt}$ и интегрируя первое уравнение (3) по x при постоянном t , получим соотношение

$$EF(1 + \mu \varepsilon_{x0}^2) \varepsilon_{x0} + 3\mu EJ_0 \varepsilon_{x0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = C(t), \quad (6)$$

справедливое для всех $0 \leq x \leq l$. Для выполнения четвертого краевого условия (5), очевидно, необходимо принять $C(t) = -P(t)$, где $C(t)$ — произвольная функция времени.

Предположим, что система (3) обладает слабой нелинейностью, обусловленной незначительным отклонением зависимости между напряжением и деформацией (1) от соответствующей линейной. Тогда из соотношения (6) в нулевом приближении получим $\varepsilon_{x0} = -\frac{P(t)}{EF}$ и, следовательно, в первом приближении

$$\varepsilon_{x0} = -\frac{P(t)}{EF} (1 + \bar{\mu} P^2(t)) - 3\mu_2 P(t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2, \quad (7)$$

где $\bar{\mu} = \frac{a_3}{F^2}$, $\mu_2 = \bar{\mu} EJ_0$.

Подставляя выражения (6) и (7) во второе уравнение (3), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению относительно $w(x, t)$:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\alpha_0 + \alpha_1 w^2) \frac{\partial w}{\partial t} + EJ_0 (1 - 3\bar{\mu}R(t)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(J_2 + 18\bar{\mu}_1 J_0 R_1(t)) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 + 27\bar{\mu}_2^2 J_0 P^2(t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^5 \right] = 0, \quad (8)$$

которое следует интегрировать при краевых условиях:

$$w(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (9)$$

где $\mu_1 = \bar{\mu} \frac{J_0}{F}$, $R(t) = P^2(t) (1 + \bar{\mu} P^2(t))^2$, $R_1(t) = P^2(t) (1 + \bar{\mu} P^2(t))$.

Полученное уравнение в случае малых прогибов (геометрическая линейная теория) и $P(t) = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$ совпадает с уравнением, рассмотренным в работах [1, 3].

Приближенное решение краевой задачи (8), (9) ищем в виде

$$w(x, t) = \varphi(t) \sin \frac{\pi}{l} x, \quad (10)$$

где $\varphi(t)$ — неизвестная функция времени, $\sin \frac{\pi}{l} x$ — первая форма собственных колебаний.

Подставляя выражение (10) в уравнение (8), воспользовавшись при этом методом Галеркина [2, 4, 5], получим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + 2(\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \varphi^2(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} + \Omega^2 (1 - 2\kappa \cos vt) \varphi(t) - \omega^4 (\bar{\mu}_3 + \kappa_1 \cos vt) \varphi^3(t) - \omega^6 (\bar{\mu}_2 \bar{P}_0^2 + \kappa_2 \cos vt) \varphi^5(t) = 0. \quad (11)$$

Здесь приняты обозначения: $\omega^2 = \pi^4 EJ_0 / ml^4$ — частота собственных колебаний невозмущенной системы; $P_{э,к} = \pi^2 EJ_0 / l^2$ — эйлеровская критическая сила; $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 / 2m$; $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 / 8m$; $\Omega^2 = \omega^2 (1 - N_0)$; $\kappa = N_1 / 2 (1 - N_0)$; $N_0 = P_0 / P_{э,к} + 3\bar{\mu} P_0^2$; $N_1 = P_1 / P_{э,к} + 6\bar{\mu} P_0 P_1$; $\bar{P}_0^2 = P_0^2 + 0,5 P_1^2$; $\kappa_1 = 2\bar{\mu}_1 P_0 P_1$; $\kappa_2 = 2\bar{\mu}_2 P_0 P_1$; $\bar{\mu}_3 = \bar{\mu}_1 \bar{P}_0^2 + \mu_3$; $\bar{\mu}_1 = 27 m a_3^2 E / 2 F^3$; $\mu_3 = 3 m a_3 E J_2 / 4 J_0^2$; $\bar{\mu}_2 = 135 m^2 a_3^2 E / 8 F^4$.

Таким образом, видим, что совместный учет физической и геометрической нелинейностей существенно изменяет вид уравнения параметрически возбуждаемых колебаний и позволяет более точно изучить вопросы о динамической устойчивости стержней.

2. Исследуем главную область динамической неустойчивости $\nu = 2\Omega$. Вводя в уравнение (11) быстрое время $\tau = \Omega t$ и малый параметр $\varepsilon = \varphi = \varepsilon \frac{1}{2} f$, а также обозначая $\varepsilon \lambda_0 = \bar{\alpha}_0 / \Omega$, $\lambda_2 = \bar{\alpha}_1 / \Omega$, $\eta = \nu / 2\Omega$, $\kappa = \varepsilon \kappa'$, запишем его в виде

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f = \varepsilon \left[2\kappa' \cos 2\eta\tau f - 2(\lambda_0 + \lambda_2 f^2) \frac{df}{d\tau} + \frac{\omega^4}{\Omega^2} (\bar{\mu}_3 + \kappa_1 \cos 2\eta\tau) f^3 + \varepsilon \frac{\omega^6}{\Omega^2} (\bar{\mu}_2 \bar{P}_0^2 + \kappa_2 \cos 2\eta\tau) f^5 \right]. \quad (12)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$f = a \cos(\eta\tau + \vartheta), \quad (13)$$

при η близких к единице, что и соответствует главной области динамической неустойчивости. Для амплитуды a и сдвига фаз ϑ при этом, согласно [6], получаем систему дифференциальных уравнений

$$\eta \frac{da}{d\tau} = -\varepsilon a \eta \left(\lambda_0 + \frac{1}{4} \lambda_2 a^2 \right) - \frac{\varepsilon a}{2} \left(\kappa' + \frac{3}{8} a^2 h_1 \right) \sin 2\vartheta, \quad (14)$$

$$a \eta \frac{d\vartheta}{d\tau} = 0,5 (1 - \eta^2) a - \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a^3 - \frac{\varepsilon a}{2} \left(\kappa' + \frac{3}{8} a^2 h_1 \right) \cos 2\vartheta,$$

где $\gamma = \bar{\mu}_3 \frac{\omega^4}{\Omega^2}$, $h_1 = \kappa_1 \frac{\omega^4}{\Omega^2}$.

Для стационарного режима в первом приближении получаем соотношения:

$$-\varepsilon a_0 \eta \left(\lambda_0 + \frac{1}{4} \lambda_2 a_0^2 \right) - \frac{\varepsilon a_0}{2} \left(\kappa' + \frac{3}{8} a_0^2 h_1 \right) \sin 2\vartheta_0 = 0, \quad (15)$$

$$0,5 (1 - \eta^2) a_0 - \frac{3}{8} \varepsilon \gamma a_0^3 - \frac{\varepsilon a_0}{2} \left(\kappa' + \frac{3}{8} a_0^2 h_1 \right) \cos 2\vartheta_0 = 0.$$

Ненулевое решение этой системы $r_0^2 = \varepsilon a_0^2$, ϑ_0 с точностью до величин первого порядка малости включительно выписывается в виде

$$r_0^2 = \frac{3}{\lambda_2^2 \eta^2 + n} (c_0 - c_1 \eta^2 \pm \sqrt{c^2 - b \eta^2 + e \eta^4 - 0,25 \lambda_2^2 \eta^6}), \quad (16)$$

$$\vartheta_0 = -0,5 \arctg \frac{2\eta (\varepsilon \lambda_0 + 0,25 \lambda_2 r_0^2)}{(1 - \eta^2) - 0,75 \gamma r_0^2}, \quad (17)$$

где для сокращения записи приняты обозначения:

$$c_0 = \gamma + 0,5 \kappa h_1; \quad c_1 = \gamma + \frac{4}{3} \varepsilon \lambda_0 \lambda_2; \quad n = \frac{9}{4} \gamma^2 - \frac{9}{16} h_1^2;$$

$$c^2 = \kappa \gamma h_1 + \kappa^2 \gamma^2 + \frac{1}{4} h_1^2; \quad b = \kappa \gamma h_1 + 0,5 h_1^2 + \frac{4}{3} \varepsilon \lambda_0 \lambda_2 (\kappa h_1 + 2\gamma) +$$

$$+ \varepsilon^2 \lambda_0^2 (4\gamma^2 - h_1^2) + \frac{4}{9} \lambda_2^2 (1 - \kappa^2); \quad e = \frac{8}{3} \varepsilon \lambda_0 \lambda_2 \gamma + \frac{8}{9} \lambda_2^2 + \frac{1}{4} h_1^2.$$

Из соотношения (16) для каждого значения η^2 , как и для случая колебаний без затухания, имеем два значения r_0^2 . Кривая, определяемая этим соотношением на плоскости (η^2, r_0^2) , пересекает ось η^2 в точках, определяющих главную область динамической неустойчивости. Границы этой области определяются как положительные корни кубического уравнения

$$0,25 \lambda_2^2 (\eta^2)^3 + (c_1^2 - e) (\eta^2)^2 - (2c_0 c_1 - b) \eta^2 + (c_0^2 - c^2) = 0. \quad (18)$$

Если пренебречь нелинейным затуханием ($\lambda_2 = 0$, $\varepsilon \lambda_0 \neq 0$), тогда

$$\eta_1^2 = \frac{1}{2(c_1^2 - e)} [(2c_0 c_1 - b) - \sqrt{(2c_0 c_1 - b)^2 - 4(c_0^2 - c^2)(c_1^2 - e)}], \quad (19)$$

$$\eta_2^2 = \frac{1}{2(c_1 - e)} [(2c_0 c_1 - b) + \sqrt{(2c_0 c_1 - b)^2 - 4(c_0^2 - c^2)(c_1^2 - e)}].$$

Из соотношений (16) и (19) следует, что параметрический резонанс может возникнуть при значениях $\eta^2 \in (\eta_1^2, \eta_2^2)$, если выполняется неравенство

$$(2c_0c_1 - b)^2 > 4(c_0^2 - c^2)(c_1^2 - e). \quad (20)$$

Это неравенство выполняется лишь тогда, когда

$$\varepsilon^2 \lambda_0^2 < \frac{2c_0c_1 - \kappa\gamma h_1 - 0,5h_1^2 - 2\sqrt{(c_0^2 - c^2)(c_1^2 - e)}}{4\gamma^2 - h_1^2}. \quad (21)$$

Условия устойчивости для полученных ненулевых стационарных значений амплитуды r_0 и фазы ϑ_0 (16), (17) имеют вид

$$0,5\lambda_2\eta r_0^2 + \frac{(2\varepsilon\lambda_0 + 0,5\lambda_2r_0^2)\kappa\eta}{\kappa + 0,375h_1r_0^2} > 0, \\ \lambda_2\eta^2r_0^2\left(\varepsilon\lambda_0 + \frac{1}{4}\lambda_2r_0^2\right) + 0,75\gamma r_0^2(\eta^2 - 1 + 0,75\gamma r_0^2) - \\ - 0,375h_1r_0^2(\kappa + 0,375h_1r_0^2) > 0, \quad (22)$$

а для нулевого стационарного значения амплитуды —

$$-\varepsilon\lambda_0 - \frac{1}{2\eta}\sqrt{\kappa^2 - (\eta^2 - 1)^2} < 0. \quad (23)$$

3. Для иллюстрации параметрически возбуждаемых колебаний стержня прямоугольного сечения при нелинейном законе упругости рассмотрим числовой пример: $F = 102 \text{ см}^2$, $l = 200 \text{ см}$, $J_0 = 614,125 \text{ см}^4$, $J_2 = 6655,58 \text{ см}^6$, материал — медь, $\rho = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$, $m = 0,9254 \times$

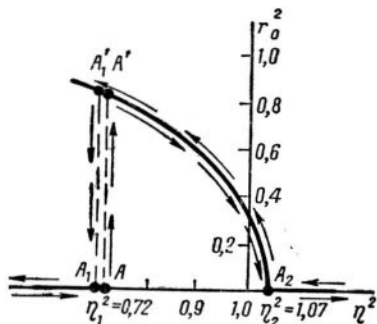


Рис. 2.

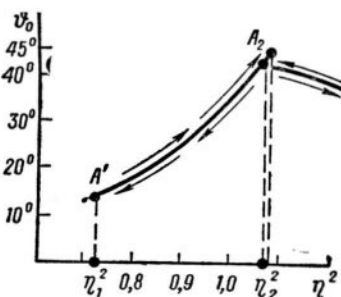


Рис. 3.

$\times 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{см}^2$, $E = 1,24 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\omega = 223,6 \text{ 1/сек}$, $P_{\text{э.к}} = 1,87713 \times 10^5 \text{ кг}$. Приближенные значения K , G , γ_2 для данного материала заимствуем из [1]: $K = 1,37 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $G = 0,46 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma_2 = -0,18 \times 10^6$, $a_3 = 0,17 \cdot 10^{-6} \text{ см}^4/\text{кг}^2$.

Пусть $\lambda_2 = 0$, $\varepsilon\lambda_0 = 0,23$, $P_0 = 0,4 P_{\text{э.к}}$, $P_1 = 0,12 P_{\text{э.к}}$. Тогда, пользуясь принятыми обозначениями и выражениями (19), (16), построим резонансную кривую (рис. 2).

Анализируя полученную кривую, видим, что при увеличении η состояние покоя остается устойчивым до тех пор, пока не достигается значение $\eta = \eta_1$. При этом значении частоты внезапно возникают колебания с конечной амплитудой AA' . Дальнейшее увеличение частоты внешней силы ν приводит к уменьшению амплитуды колебаний, и при $\eta = \eta_2$ колебания полностью затухают.

При уменьшении η , начиная с $\eta = \eta_2$, возникают колебания, и при дальнейшем уменьшении η амплитуда колебаний будет плавно возрастать по кривой A_2A' . При этом возможно затягивание до некоторой точки A'_1 , в которой происходит «срыв» колебаний на величину A'_1A_1 . Причем «срыв» колебаний наступает довольно скоро после выхода за пределы резонансной области AA_2 .

На рис. 3 построена соответствующая диаграмма изменения угла θ_0 , означающего сдвиг фазы между возмущающей силой и параметрически возбуждаемыми колебаниями. При увеличении η , как показывает рис. 3, угол θ_0 сдвига фаз плавно возрастает. В точке, незначительно превосходящей значение $\eta = \eta_2$, происходит малый срыв фазы, а затем она уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Каудерер, Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.
2. В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, ГИТТЛ, М., 1956.
3. Ю. А. Митропольский и Б. И. Моисеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1968.
4. А. С. Вольмир, Устойчивость деформированных систем, «Наука», М., 1967.
5. В. Н. Челомей, О колебаниях стержней, подверженных действию периодически меняющихся продольных сил, Труды КАИ, вып. 8, 1937.
6. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 8.XII 1974 г.
Институт математики АН УССР