УДК 518:517.944/.947

А. В. Гладкий, І. І. Ляшко

Дослідження однієї різницевої схеми підвищеного порядку точності

У цій роботі розглядається задача Діріхле для рівняння Пуассона в смузі. Для чисельного розв'язування пропонується різницева схема четвертого порядку апроксимації на квадратній сітці. Досліджується питання існування та єдиності розв'язку різницевої задачі, знайдено її точний розв'язок і доведено рівномірну збіжність його до розв'язку диференціальної задачі із швидкістю $O(h^4)$.

Зауважимо, що в роботі [1] досліджувалась різницева схема другого порядку апроксимації для рівняння Пуассона в деяких нескінченних областях.

В смузі

$$\bar{G} = G + \Gamma = \{-\infty < x_1 < +\infty,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l,\ l > 0\},$$

де Γ — границя області, розглянемо задачу Діріхле для рівнянн і Пуассона

$$\Delta u = -F(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = g(x). \tag{2}$$

Для чисельного розв'язування введемо квадратну різницеву сітку. Нехай

$\overline{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{i_\alpha} = hi_\alpha,\ i_1 = 0, \pm 1, \dots;\ i_2 = 0, 1, \dots, n+1;\ h = l/(n+1);\ \alpha = 1,2\}$

— одновимірна сітка на $[-\infty, +\infty]$, $[0, l]$.

$$\omega_\alpha = \{x_\alpha^{i_\alpha} = hi_\alpha;\ i_1 = 0, \pm 1, \dots;\ i_2 = 1, 2, \dots, n;\ \alpha = 1, 2\}$$

— множина внутрішніх вузлів $\overline{\omega}_\alpha$, $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$ — двовимірна сітка в $\overline{G}$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ — множина внутрішніх вузлів $\overline{\omega}$.

Через γ позначимо множину граничних вузлів, тобто $\gamma = \{x = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2});\ x_1^{i_1} \in \overline{\omega}_1;\ x_2^{i_2} = 0, l\}$.

Диференціальній задачі поставимо у відповідність різницеву задачу

$$\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6}\Lambda_1\Lambda_2\right) y = -\varphi, \quad x \in \omega, \tag{3}$$

$$y = g(x), \quad x \in \gamma, \tag{4}$$

де введені позначення [2]

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad y_{x_\alpha} = (y^{+1_\alpha} - y)/h, \quad y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{-1_\alpha})/h, \quad y = y(x),$$

$$x^{\pm 1_1} = (x_1^{i_1 \pm 1}, x_2), \quad \varphi = F + \frac{h^2}{12}\Delta F.$$

Нехай $g \in C^{6,\lambda}(\Gamma)$, $F \in C^{4,\lambda}(\overline{G})$, $F(x) = O\left(\frac{1}{R^{1+\alpha}}\right)$, $R = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\alpha > 0$. Тоді $u \in C^{6,\lambda}(\overline{G})$ [3]. Можна показати, що різницева схема (3) — (4) апроксимує диференціальну з четвертим порядком апроксимації. Справедлива така теорема.

Т е о р е м а 1. *Якщо праві частини задачі* (3) — (4) *обмежені, то вона має єдиний обмежений розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Аналогічно [1] розіб'ємо область ω на шари $\omega^{(k)}$ так, щоб $\omega = \bigcup\limits_{k=1}^{r} \omega^{(k)}$, де r — загальна кількість шарів. Нескінченну систему (3) — (4) розглянемо як операторне рівняння

$$y = Ay + B \tag{5}$$

в нормованому просторі m обмежених послідовностей, визначених на сітці ω з нормою $\|y\| = \sup\limits_{x \in \omega}|y|$. При цьому лінійний оператор A є нескінченною матрицею системи (3) — (4) із такими властивостями: а) для рядків матриці A, що відповідають вузлам сітки $x \in \omega \setminus \omega^{(1)}$, сума усіх елементів рядка дорівнює одиниці; б) для рядків матриці A, що відповідають вузлам $x \in \omega^{(1)}$, сума усіх елементів рядка менша одиниці. Із властивостей а), б) маємо

$$\|A\| = 1, \quad \|A^r\| < 1. \tag{6}$$

Із (6) згідно з [4] випливає, що операторне рівняння має єдиний розв'язок в m і, значить, система (3) — (4) має єдиний обмежений розв'язок.

Введемо квадратні матриці розмірності n:

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\mathrm{SIN}\,\frac{ij\pi}{n+1}\right]_{i,j=1}^{n}; \quad T = [t_{ij}]_{i,j=1}^{n},$$

де

$$t_{ij}=\begin{cases}1, & |i-j|=1,\\ 0, & |i-j|\neq 1;\end{cases}$$

n-вимірні вектори

$$\vec{y}_i=\{y_{ik}\}_{k=1}^n,\quad y_{ik}=y(x_1^i,x_2^k),\quad \vec{\Psi}_i=\{\Psi_{ik}\}_{k=1}^n,$$

$$\Psi_{i1}=6h^2\varphi_{i1}+4g_{i0}+g_{i+1,0}+g_{i-1,0},\quad \Psi_{ik}=6h^2\varphi_{ik}\quad (k=2,\ldots,n-1),$$

$$\Psi_{in}=6h^2\varphi_{in}+4g_{i,n+1}+g_{i-1,n+1}+g_{i+1,n+1}\hat{\vec{\Psi}}_i=P\vec{\Psi}_i;$$

числа

$$\mu_k=\eta_k+\sqrt{\eta_k^2-1},\quad \nu_k=\eta_k-\sqrt{\eta_k^2-1},\quad t_k=2\cos\frac{k\pi}{n+1},$$

$$\eta_k=(10-2t_k)/(4+t_k).$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. *Для обмеженого розв'язку різницевої схеми* (3) — (4) *має місце рівність*

$$\vec{y}_i=P\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}\vec{H}_p\right)\quad (i=0,\pm 1,\ldots),\tag{7}$$

де $\vec{H}_p=\{H_{pk}\}_{k=1}^n$, $H_{pk}=\hat{\Psi}_{pk}/(4+t_k)$, $\dfrac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}$ — *діагональна матриця розмірності* n *з елементами* $\nu_k^{|i-p|}/(\mu_k-\nu_k)$.

Доведення. Нехай D_h — множина вузлів області ω

$$D_h=\{x=(x_1^{i_1},x_2^{i_2});\ x_\alpha^{i_\alpha}=hi_\alpha;\ i_1=0,\pm 1,\ldots,N;\ i_2=1,\ldots,n;\ \alpha=1,2\},$$

де $N>0$ — довільне ціле число. Тоді систему (3) — (4) в області D_h можна записати у вигляді

$$20\vec{y}_i-4(\vec{y}_{i+1}+\vec{y}_{i-1})-T(\vec{y}_{i-1}+4\vec{y}_i+\vec{y}_{i+1})=\vec{\Psi}_i.\tag{8}$$

Помноживши рівняння (8) зліва на P і враховуючи властивості матриці T [5]:

$$T=P\Lambda P,\quad P^2=E,\quad \Lambda=[t_k]_{k=1}^n,\tag{9}$$

де Λ — діагональна матриця розмірності n, після неважких перетворень одержимо

$$\hat{y}_{i+1,k}-2\eta_k\hat{y}_{ik}+\hat{y}_{i-1,k}=-H_{ik}\quad (k=1,\ldots,n).\tag{10}$$

Через те що $\eta_k>1$, то загальний розв'язок рівнянь (10) можна записати у вигляді [5]

$$\hat{\vec{y}}_i=\mu^i\vec{A}+\nu^i\vec{B}+\sum_{p=-N+1}^{N-1}\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}\vec{H}_p,\tag{11}$$

де $\vec{A}$, $\vec{B}$ — n-вимірні вектори довільних сталих.

Помноживши рівність (11) на P, граничим переходом при $N\to+\infty$ одержимо розв'язок задачі (3) — (4). Враховуючи, що для обмеженого розв'язку при $i\to\pm\infty$ повинно бути $\vec{A}=\vec{B}=0$, впевнюємось в справедливості рівності (7).

Точність різницевої схеми встановлює наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай $u \in C^{(6)}(\overline{G})$. Тоді розв'язок різницевої схеми* (3)—(4) *рівномірно збігається до розв'язку диференціальної задачі із швидкістю* $O(h^4)$.

Доведення. Нехай $z = y - u$ — похибка різницевої схеми (3)—(4), що є розв'язком крайової задачі

$$\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6}\Lambda_1\Lambda_2\right)z = -\Psi, \quad x \in \omega, \tag{12}$$

$$z|_\gamma = 0, \tag{13}$$

де $\Psi = \varphi + \left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6}\Lambda_1\Lambda_2\right)u = O(h^4)$, $x \in \omega$. Тоді за формулою (7), для розв'язку задачі (12) — (13) одержимо

$$\vec{z}_i = P\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu}\vec{\Omega}_p\right) \quad (i = 0, \pm 1, \ldots), \tag{14}$$

де $\Omega_{pk} = \hat{L}_{pk}/(4 + t_k)$, $\vec{\hat{L}}_p = PL_p$, $L_{pk} = 6h^2\Psi_{pk}$. Значить,

$$|z_{ij}| < O(h^7)\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k^{|i-p|}\,\mathrm{SIN}\,\frac{k\pi}{2}\,\mathrm{SIN}\,\frac{n\alpha}{2}\,\mathrm{SIN}\,(j\alpha)}{(\mu_k - \nu_k)\,\mathrm{SIN}\,\frac{\alpha}{2}}\right|,$$

де $\alpha = k\pi/(n+1)$.

Через те що $\eta_k - 1 = 3(2 - t_k)/(4 + t_k) > \mathrm{SIN}^2\,\frac{\alpha}{2}$, то

$$\mu_k - \gamma_k = 2\sqrt{\eta_k^2 - 1} > \mathrm{SIN}\,\frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

Враховуючи нерівність (15), одержуємо

$$|z_{ij}| < O(h^7)\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k^{|i-p|}}{\mathrm{SIN}^2\,\frac{\alpha}{2}}$$

або

$$|z_{ij}| < O(h^5)\sum_{p=-\infty}^{\infty} \nu_1^{|i-p|}, \tag{16}$$

бо $\nu_k < \nu_1$ $(k > 1)$, $\mathrm{SIN}\,x > \frac{2x}{\pi}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ і

$$\sum_{k=1}^{n} 1/\mathrm{SIN}^2\,\frac{\alpha}{2} < \sum_{k=1}^{n} 1/k^2h^2 < \frac{2}{h^2}.$$

Оцінимо ряд в нерівності (16). Оскільки $\nu_1 < 1$, то

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \nu_1^{|i-p|} \leqslant \frac{2}{1 - \nu_1}.$$

Покажемо, що $1/(1-\nu_1)$ веде себе як h^{-1}. Дійсно,

$$\nu_1 = \frac{1}{\mu_1} = (4 + t_1)/(10 - 2t_1 + \sqrt{3(t_1^2 - 16t_1 + 28)} <$$

$$< 6/\left(6 + \sqrt{(14 - t_1)(2 - t_1)} < 1/\left(1 + \mathrm{SIN}\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right.$$

Значить,

$$1/(1-\nu_1) < 1/\mathrm{SIN}\frac{\pi}{2(n+1)} < 2h^{-1}. \tag{17}$$

Підставляючи оцінку (17) в нерівність (16), одержуємо $|z_{ij}| \leqslant Mh^4$, де $M > 0$ — стала, незалежна від h. Це і доводить теорему.

Примітка. Рівнянню (1) може бути поставлено у відповідність різницеве рівняння шостого порядку апроксимації

$$\left(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6}\Lambda_1\Lambda_2\right)y = -\varphi_1, \quad x \in \omega,$$

де

$$\varphi_1 = F + \frac{h^2}{12}\Delta F + \frac{h^4}{360}\left(\Delta\Delta F + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right).$$

При цьому дослідження різницевої схеми шостого порядку апроксимації можна провести аналогічно.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. Д. Майергойз, К вопросу о применении метода сеток в случае специальных бесконечных областей.— Изв. вузов, Матем., 1967, № 6(61).
2. А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, «Наука», М., 1971.
3. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М., 1957.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
5. И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации, «Наукова думка», Киев, 1973.

Інститут кібернетики АН УРСР
Київський державний університет

Надійшла до редакції 29.IV 1974 р.,
після переробки — 5.V 1975 р.