УДК 517.512.6

*В. Т. Мартинюк*

# Про наближення ламаними кривих, заданих параметричними рівняннями, в хаусдорфовій метриці

У цій замітці вивчається наближення кривих, заданих параметричними рівняннями, вписаними ламаними. За міру відхилення кривої від ламаної розглядається хаусдорфова віддаль між ними.

Дамо спочатку необхідні означення.

Означення 1. (див., наприклад, [1]). Якщо $E$ і $F$ — довільні обмежені і замкнені точкові множини скінченновимірного евклідового простору, то хаусдорфовою віддаллю між $E$ і $F$ називається число

$$r(E, F) = \max \left[\max_{P \in E} \min_{Q \in F} \rho(P, Q); \max_{P \in F} \min_{Q \in E} \rho(P, Q)\right], \tag{1}$$

де $\rho(P, Q)$ — віддаль між точками $P$ і $Q$, тобто довжина прямолінійного відрізка, що з'єднує точки $P$ і $Q$.

Нехай $f(t)$ — задана і обмежена на проміжкові $[a, b]$ функція і $\delta$ — будь-яке невід'ємне число.

Означення 2. Модулем немонотонності функції $f(t)$ називається вираз (див., наприклад, [2])

$$\mu(f; \delta) = \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta} \{\sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} [|f(t_1) - f(t)| + |f(t_2) - f(t)|] - |f(t_1) - f(t_2)|\}. \tag{2}$$

Через $\omega(f;\delta)$ $(\delta \geqslant 0)$ позначимо, як звичайно, модуль неперервності функції $f(t)$, тобто

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|t_1-t_2|\leqslant\delta} |f(t_1) - f(t_2)|. \qquad (3)$$

Надалі нам буде потрібним таке допоміжне твердження.

Л е м а. *Нехай $f(t)$ — задана і обмежена на відрізкові $[a, b]$ функція, $\delta$ — будь-яке невід'ємне число і $t_1$, $t_2$ $(t_1 \leqslant t_2)$ — довільна пара точок відрізка $[a, b]$ таких, що $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$. Тоді для всіх $t \in [t_1, t_2]$ справджуються нерівності*

$$M_1 - \frac{1}{2}\mu(f;\delta) \leqslant f(t) \leqslant M_2 + \frac{1}{2}\mu(f;\delta), \qquad (4)$$

$$M_1 - \omega\left(f;\frac{\delta}{2}\right) \leqslant f(t) \leqslant M_2 + \omega\left(f;\frac{\delta}{2}\right), \qquad (5)$$

*де* $M_1 = \min[f(t_1), f(t_2)]$, $M_2 = \max[f(t_1), f(t_2)]$, $\mu(f;\delta)$, $\omega\left(f;\frac{\delta}{2}\right)$ — *відповідно модуль немонотонності та модуль неперервності функції $f(t)$.*

Д о в е д е н н я. Міркуємо від супротивного. Нехай існує точка $t_0 \in [t_1, t_2]$ така, що, наприклад, $f(t_0) < M_1 - \frac{1}{2}\mu(f;\delta)$. Тоді $f(t_0) < f(t_1)$, $f(t_0) < f(t_2)$ і, виходячи із означення модуля немонотонності $\mu(f;\delta)$, маємо

$$\mu(f;\delta) \geqslant |f(t_1) - f(t_0)| + |f(t_2) - f(t_0)| - |f(t_1) - f(t_2)| =$$

$$= \left.\begin{cases} 2\,[f(t_1) - f(t_0)], & \text{якщо } f(t_1) \leqslant f(t_2), \\ 2\,[f(t_2) - f(t_0)], & \text{якщо } f(t_1) \geqslant f(t_2) \end{cases}\right\} =$$

$$= 2\{\min[f(t_1), f(t_2)] - f(t_0)\} = 2\,[M_1 - f(t_0)] > \mu(f;\delta).$$

Одержана суперечність доводить вірність співвідношень (4). Аналогічно, використовуючи (3), доводиться вірність співвідношень (5). Лему доведено.

Нехай тепер в $m$-вимірному евклідовому просторі задана неперервна крива $\Gamma$ своїми параметричними рівняннями $x_i = \varphi_i(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Для спрощення викладок розглянемо випадок $m = 2$. Для випадку $m > 2$ міркування ті самі.

Нехай $n$ — фіксоване натуральне число. Через $\Gamma_n$ позначимо вписану в $\Gamma$ ламану лінію, вершини якої розміщені в точках $M_k\left(\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right), \varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Знайдемо відхилення між $\Gamma$ і $\Gamma_n$ в хаусдорфовій метриці, яка визначається рівністю (1).

Якщо крива $\Gamma$ — графік функції $f(t)$ $(t \in [a, b])$, то така задача розв'язана: у випадку рівномірної метрики — в роботі [3], у випадку інтегральної метрики — в роботі [4], а у випадку хаусдорфової метрики — в роботі [5].

Т е о р е м а 1. *Якщо неперервна крива $\Gamma$ задана параметричними рівняннями $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ і $\mu(\varphi_1;\delta)$, $\mu(\varphi_2;\delta)$ $(\delta \geqslant 0)$, — відповідно модулі немонотонності функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ і $\Gamma_n$ — ламана, вписана в $\Gamma$ в точках $M_k\left(\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right), \varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, то для всіх $n = 1, 2, \ldots$ справджуються нерівності*

$$r(\Gamma, \Gamma_n) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\left[A_1 + \mu\left(\varphi_1;\frac{1}{n}\right)\right]^2 + \left[A_2 + \mu\left(\varphi_2;\frac{1}{n}\right)\right]^2}, \qquad (6)$$

*де*

$$A_i = \max_{k=1,2,\ldots,n} \left| \varphi_i\left(\frac{k-1}{n}\right) - \varphi_i\left(\frac{k}{n}\right) \right| \quad (i = 1, 2).$$

Доведення. Нехай $P(x_1, y_1)$ — довільна точка кривої $\Gamma$ і цій точці на $\Gamma$ відповідає значення параметра $t = t_1$, тобто $x_1 = \varphi_1(t_1)$, $y_1 = \varphi_2(t_1)$. Через $\Delta_{k_0}$ позначимо той із відрізків $\Delta_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, який містить точку $t_1$. Покладемо

$$x_2 = \frac{\varphi_1\left(\frac{k_0-1}{n}\right) + \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right)}{2}, \quad y_2 = \frac{\varphi_2\left(\frac{k_0-1}{n}\right) + \varphi_2\left(\frac{k_0}{n}\right)}{2},$$

і нехай для означеності

$$\max\left[\psi_1\left(\frac{k_0-1}{n}\right), \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right)\right] = \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right),$$

$$\max\left[\varphi_2\left(\frac{k_0-1}{n}\right), \varphi_2\left(\frac{k_0}{n}\right)\right] = \varphi_2\left(\frac{k_0}{n}\right).$$

Через те що $t_1 \in \Delta_{k_0}$, то, в силу леми, маємо

$$\varphi_1\left(\frac{k_0-1}{n}\right) - \frac{1}{2}\mu\left(\psi_1; \frac{1}{n}\right) \leqslant x_1 \leqslant \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right),$$

$$\varphi_2\left(\frac{k_0-1}{n}\right) - \frac{1}{2}\mu\left(\varphi_2; \frac{1}{n}\right) \leqslant y_1 \leqslant \varphi_2\left(\frac{k_0}{n}\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\varphi_2; \frac{1}{n}\right)$$

і

$$x_1 - x_2 \leqslant \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right) - \frac{\varphi_1\left(\frac{k_0-1}{n}\right) + \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right)}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[A_1 + \mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right)\right].$$

З другого боку,

$$x_1 - x_2 \geqslant \varphi_1\left(\frac{k_0-1}{n}\right) - \frac{1}{2}\mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right) - \frac{\varphi_1\left(\frac{k_0-1}{n}\right) + \varphi_1\left(\frac{k_0}{n}\right)}{2} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\left[A_1 + \mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right)\right]$$

і тому

$$|x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}\left[A_1 + \mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right)\right]. \tag{7}$$

Аналогічно

$$|y_1 - y_2| \leqslant \frac{1}{2}\left[A_2 + \mu\left(\varphi_2; \frac{1}{n}\right)\right]. \tag{8}$$

Оскільки $Q(x_2, y_2) \in \Gamma_n$, то, враховуючи (7), (8) і довільність *вибору точки* $P \in \Gamma$, одержуємо

$$\max_{P\in\Gamma} \min_{Q\in\Gamma_n} \rho(P, Q) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\left[A_1 + \mu\left(\varphi_1; \frac{1}{n}\right)\right]^2 + \left[A_2 + \mu\left(\varphi_2; \frac{1}{n}\right)\right]^2}. \tag{9}$$

Нехай тепер $P$ — будь-яка точка ламаної $\Gamma_n$ і нехай $P$ належить ланці $M_{k-1}M_k$ ламаної, де

$$M_{k-1}\left(\varphi_1\left(\frac{k-1}{n}\right), \varphi_2\left(\frac{k-1}{n}\right)\right), \ M_k\left(\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right), \varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right), \ (k \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Якщо довжина відрізка $M_{k-1}P$ менша довжини відрізка $PM_k$, то для точки $M_{k-1} \in \Gamma$ маємо

$$\rho(M_{k-1}, P) \leqslant \frac{1}{2}\rho(M_{k-1}, M_k) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Якщо ж довжина відрізка $M_{k-1}P$ не менша довжини відрізка $PM_k$, то для $M_k \in \Gamma$ $\rho(M_k, P) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Таким чином, для будь-якої точки

$$P \in \Gamma_n \ \min_{Q \in \Gamma}\rho(P, Q) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

а, отже, і

$$\max_{P \in \Gamma_n}\min_{Q \in \Gamma}\rho(P, Q) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \tag{10}$$

Із (9) і (10), враховуючи (1), одержуємо (6). Теорему 1 доведено.

Покажемо, що на всій множині неперервних кривих покращити оцінку (6) неможливо.

Дійсно, розглянемо криву $\overline{\Gamma}$, що задається рівняннями

$$x = \overline{\varphi}_1(t) = \begin{cases} 4nt, & \text{якщо } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 3 - 2nt, & \text{якщо } \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ nt, & \text{якщо } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$y = \overline{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 1 + 2nt, & \text{якщо } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 4 - 4nt, & \text{якщо } \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 - nt, & \text{якщо } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко переконатись, що $\mu\left(\overline{\varphi}_i; \frac{1}{n}\right) = 2$, $A_i = 1$ $(i = 1, 2)$ і, якщо $\overline{\Gamma}_n$ — вписана в $\overline{\Gamma}$ ламана, то, внаслідок (6),

$$r(\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_n) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\left[A_1 + \mu\left(\overline{\varphi}_1; \frac{1}{n}\right)\right]^2 + \left[A_2 + \mu\left(\overline{\varphi}_2; \frac{1}{n}\right)\right]^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

З другого боку, оскільки $\overline{P}(2, 2) \in \overline{\Gamma}$, $\overline{Q}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \overline{\Gamma}_n$, то $r(\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_n) \geqslant$ $\geqslant \min_{Q \in \Gamma_n}\rho(\overline{P}, Q) = \rho(\overline{P}, \overline{Q}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ і доведено, що оцінку (6) покращити не можна.

Через $\Gamma_{\omega_1, \omega_2}$ позначимо сукупність плоских неперервних кривих, що задаються рівняннями виду $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ $t \in [0, 1]$, де $\varphi_i \in H_{\omega_i}[0, 1]$

($i=1,2$), тобто $\varphi_i(t)$ — неперервна на відрізкові $[0,1]$ функція, яка має мажорантою модуля неперервності $\omega(\varphi_i;\delta)$ заданий модуль неперервності $\omega_i(\delta)$.

Теорема 2. *Якими б не були модулі неперервності* $\omega_i(\delta)$ ($i=1,2$), *для всіх* $n=1,2,\ldots$ *справджуються рівності*

$$\sup_{\Gamma\in\Gamma_{\omega_1,\omega_2}} r(\Gamma,\Gamma_n)=\sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2+\left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}, \tag{11}$$

*де* $\Gamma_n$ — *ламана, вписана в* $\Gamma\in\Gamma_{\omega_1,\omega_2}$.

Доведення. Нехай $\Gamma$ — будь-яка крива множини $\Gamma_{\omega_1,\omega_2}$ і нехай $\Gamma$ задається рівняннями $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $t\in[0,1]$. Якщо $P(x_1,y_1)\in\Gamma$, то позначимо через $t_1$ те значення параметра $t$, для якого $x_1=\varphi_1(t_1)$, $y_1=\varphi_2(t_1)$ і нехай $\frac{k-1}{n}\leqslant t_1\leqslant\frac{k}{n}$ ($k\in\{1,2,\ldots,n\}$). Припустимо для означеності, що $t_1-\frac{k-1}{n}\geqslant\frac{k}{n}-t_1$. Тоді для точки $Q\left(\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right),\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right)\in\Gamma_n$ маємо

$$\rho(P,Q)=\sqrt{\left[\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi_1(t_1)\right]^2+\left[\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)-\varphi_2(t_1)\right]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2+\left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}.$$

Тому

$$\max_{P\in\Gamma}\min_{Q\in\Gamma_n}\rho(P,Q)\leqslant\sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2+\left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}. \tag{12}$$

Нехай тепер $P(x_1,y_1)\in\Gamma_n$ і нехай точка $P$ належить відрізкові $M_{k-1}M_k$ ламаної $\Gamma_n$, тобто $x_1$ знаходиться між числами $\varphi_1\left(\frac{k-1}{n}\right)$ і $\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right)$, а $y_1$ — між числами $\varphi_2\left(\frac{k-1}{n}\right)$ і $\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)$. Через точку $P$ проведемо пряму перпендикулярно відрізкові $M_{k-1}M_k$ і нехай $Q(x_2,y_2)$ — одна із точок перетину цього перпендикуляра і кривої $\Gamma$ (хоча б одна така точка існує внаслідок неперервності кривої $\Gamma$). Нехай $t_2\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ — значення параметра $t$, для якого $x_2=\varphi_1(t_2)$, $y_2=\varphi_2(t_2)$. Якщо тепер $t_2-\frac{k-1}{n}\leqslant\frac{k}{n}-t_2$, то

$$\rho(P,Q)\leqslant\rho\left(M_{k-1}\left(\varphi_1\left(\frac{k-1}{n}\right),\varphi_2\left(\frac{k-1}{n}\right)\right),Q\right)=$$

$$=\sqrt{\left[\varphi_1\left(\frac{k-1}{n}\right)-\varphi_1(t_2)\right]^2+\left[\varphi_2\left(\frac{k-1}{n}\right)-\varphi_2(t_2)\right]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2+\left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}.$$

Якщо ж $t_2 - \frac{k-1}{n} \geqslant \frac{k}{n} - t_2$, то, аналогічно,

$$\rho(P, Q) \leqslant \rho\left(M_k\left(\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right), \varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right), Q\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2 + \left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}.$$

Таким чином, маємо

$$\max_{P \in \Gamma_n} \min_{Q \in \Gamma} \rho(P, Q) \leqslant \sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2 + \left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}. \tag{13}$$

Із (12) і (13), враховуючи (1) і довільність $\Gamma \in \Gamma_{\omega_1, \omega_2}$, одержуємо

$$\sup_{\Gamma \in \Gamma_{\omega_1, \omega_2}} r(\Gamma, \Gamma_n) \leqslant \sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2 + \left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2}. \tag{14}$$

Розглянемо тепер криву $\overline{\Gamma} \in \Gamma_{\omega_1, \omega_2}$, що задається рівняннями $x = \overline{\varphi}_1(t)$, $y = \overline{\varphi}_2(t)$, де

$$\overline{\varphi}_i(t) = \begin{cases} \omega_i(t), & \text{якщо } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2n}, \\ \omega_i\left(\frac{1}{n} - t\right), & \text{якщо } \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}, \quad (i = 1, 2). \\ \frac{n}{1-n}\,\omega_i\left(\frac{1}{2n}\right)t + \frac{1}{n-1}\,\omega_i\left(\frac{1}{2n}\right), & \text{якщо } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Легко бачити, що, якщо $\overline{\Gamma}_n$ — ламана, вписана в $\overline{\Gamma}$, то

$$r(\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_n) \geqslant \max_{P \in \overline{\Gamma}} \min_{Q \in \overline{\Gamma}_n} \rho(P, Q) \geqslant \min_{Q \in \overline{\Gamma}_n} \rho\left(P\left(\varphi_1\left(\frac{1}{2n}\right), \varphi_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right), Q\right) =$$
$$= \rho\left(P\left(\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right), \omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right), Q(0, 0)\right) = \sqrt{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2 + \left[\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2},$$

що, разом із (14), доводить теорему 2.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Бл. Сендов, Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип.— Годишник на Софийск. ун-т, физ.-матем. фак., 1960/1961, т. 55, кн. 1.
2. Бл. Сендов, Линейные методы приближения периодических функций относительно одной метрики хаусдорфовского типа.— ДАН СССР, 1965, т. 160, № 5.
3. В. Н. Малоземов, Об отклонении ломаных.— Вестник Ленингр. ун-та, 1966, № 7.
4. В. Ф. Сторчай, Об отклонении ломаных в метрике $L_p$.— Матем. заметки, 1969, т. 5, вып. 1.
5. В. Т. Мартинюк, В. Ф. Сторчай, Наближення многогранними функціями в хаусдорфовій метриці.— УМЖ, 1973, т. 25, № 5.



Чернівецький державний університет



Надійшла до редакції 6.XII 1973 р.