УДК 517.929

В. П. Скрипник

Про стійкість систем з перетвореним аргументом у випадку, коли відхилення аргументу змінюють знак

У цій роботі, як і в роботах [1—4], вивчається стійкість систем з перетвореним аргументом. В роботах [1—4] розглядались рівняння з запізненням аргументу. В цій роботі вивчаються рівняння більш загального виду, а саме, рівняння, в яких відхилення аргументу змінюють знак.

Інтеграли скрізь в роботі розуміються в смислі Лебега. Вимірність, якщо не оговорено, також розуміється в смислі Лебега.

В роботі будуть використані означення і позначення роботи [4]. Крім того, позначимо: Z_λ, де $\lambda \geqslant 0$ — множина вектор-функцій, визначених при $t \leqslant t_0$, які задовольняють умову Ліпшіца з константою λ, Z — множина вектор-функцій, визначених при $t \leqslant t_0$, компоненти яких вимірні за Борелем.

Розглянемо такі дві системи: лінійну

$$y' = B(t)\, y \tag{1}$$

та нелінійну

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\,x(\varphi_k(t,x(t)))+f(t,x(\psi_l(t,x(t)))). \qquad (2)$$

Умовами ω назвемо сукупність таких умов для системи (2):

1) елементи матриць $A_k(t)$ визначені при $t\in[t_0,\infty]$ і вимірні на будь-якому скінченному відрізку $[t_0,T]$;

2) при $t\in[t_0,\infty]$ справджуються нерівності $\|A_k(t)\|\leqslant a_k$, причому, $a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$;

3) компоненти вектор-функції $f(t,\xi_l)$ визначені при $t\in[t_0,\infty)$ і $\|\xi_l\|\leqslant R$, де $R>0$, причому при фіксованих ξ_l вимірні щодо t на будь-якому скінченному відрізку $[t_0,T]$;

4) справджуються нерівності

$$\|f(t,\xi_l'')-f(t,\xi_l')\|\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}H_l\|\xi_l''-\xi_l'\|,\quad \|f(t,\xi_l)\|\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}h_l(t)\|\xi_l\|,$$

де $h_l(t)$ — вимірні функції на будь-якому скінченному відрізку $[t_0,T]$ (можна вважати, що $h_l(t)\leqslant H_l$), причому

$$H=\sum_{l=1}^{\infty}H_l<\infty,\quad \sum_{l=1}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}h_l(\tau)\,d\tau<\infty;$$

5) функції $\varphi_k(t,\xi)$ і $\psi_l(t,\xi)$ визначені при $t\in[t_0,\infty)$ і $\|\xi\|\leqslant R$, причому при фіксованих ξ вимірні щодо t на будь-якому скінченному відрізку $[t_0,T]$, а при $t\in[t_0,\infty)$ задовольняють умови Ліпшіца щодо ξ з однією і тією ж константою ν;

6) існують такі інтегровні на будь-якому скінченному відрізку $[t_0,T]$ функції $\Delta_k(t)$, що $|t-\varphi_k(t,\xi)|\leqslant\Delta_k(t)$, причому $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Delta_k(\tau)\,d\tau<\infty$;

7) існує таке $\tau_0\geqslant t_0$, що при $t\geqslant\tau_0$ буде $\varphi_k(t,\xi)\geqslant t_0$;

8) існує така послідовність $\{t_p\}$, $p=0,1,2,\ldots,\lim\limits_{p\to\infty}t_p=\infty$ і таке $\lambda\geqslant 0$, що $t_p-t_{p-1}<\dfrac{1}{d(\lambda)}$ і при $t\in[t_{p-1},t_p]$ $\varphi_k(t,\xi)$, $\psi_l(t,\xi)\leqslant t_p$, де $d(\lambda)=4L(\lambda)\gamma a+2a+4L(\lambda)\nu H+2H$, $L(\lambda)=\max\{\lambda,(a+H)R\}$. У випадку, коли $t_p-t_{p-1}<\dfrac{1}{d_0}$, де $d_0=4(a+H)R\gamma a+2a+4(a+H)R\gamma H+2H$, λ може бути будь-яким таким, що $\lambda\leqslant(a+H)R$. Як буде видно далі, чим більше λ, тим краще. Зазначимо, що у випадку, якщо $t_p-t_{p-1}<\dfrac{1}{2a+2H+\varepsilon}$, де $\varepsilon>0$, можна взяти $R_1\leqslant R$ таке, що $4(a+H)R_1\gamma a+4(a+H)R_1\gamma H\leqslant\varepsilon$, і розглянути систему (2) в можливо меншій області.

Теорема 1. *Припустимо, що*:

1) *для системи* (2) *справджуються умови* ω;

2) *елементи матриці* $B(t)$ *вимірні на будь-якому скінченному відрізку* $[t_0,T]$;

3) $\mu=\sup\limits_{\substack{t\in[t_0,\infty)\\ \tau\in[t_0,t]}}\|Y(t)Y^{-1}(\tau)\|<\infty$, де $Y(t)Y^{-1}(\tau)$ — *матриця Коші*;

4) *існує така послідовність матриць $\{B_k(t)\}$, елементи яких вимірні і обмежені на будь-якому скінченному відрізку $[t_0, T]$, що*

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) = B(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \| A_k(\tau) - B_k(\tau) \| \, d\tau < \infty, \quad b(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\sigma) < \infty$$

для будь-якого $\sigma \geqslant t_0$, *де* $b_k(\sigma) = \sup\limits_{t \in [t_0, \sigma]} \| B_k(t) \|$.

Тоді із стійкості тривіального розв'язку системи (1) *випливає стійкість по відношенню до* Z_λ *тривіального розв'язку системи* (2).

Доведення. Позначимо

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{при } \|\xi\| \leqslant R, \\ \dfrac{R}{\|\xi\|}\xi & \text{при } \|\xi\| > R, \end{cases}$$

$$F(t, \xi_l) = f(t, g(\xi_l)), \quad \bar{\varphi}_k(t, \xi) = \varphi_k(t, g(\xi)), \quad \bar{\psi}_l(t, \xi) = \psi_l(t, g(\xi)).$$

Розглянемо систему

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, g(x(\bar{\varphi}_k(t, x(t)))) + F(t, x(\bar{\psi}_l(t, x(t)))). \tag{3}$$

Нехай $z \in Z_\lambda$, $\|z(t)\| \leqslant R$. Позначимо

$$\beta = \sup_{t \leqslant t_0} \|z(t)\|, \quad \bar{\beta} = \beta(a + H)(t_1 - t_0).$$

Розглянемо послідовні наближення

$$x^{[n]}(t) = \begin{cases} z(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau)\, g(x^{[n-1]}(\bar{\varphi}_k(\tau, x^{[n-1]}(\tau))))\, d\tau + \\ + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(\tau, x^{[n-1]}(\bar{\psi}_l(\tau, x^{[n-1]}(\tau))))\, d\tau & \text{при } t \in (t_0, t_1], \\ z(t) & \text{при } t \leqslant t_0, \end{cases} \tag{4}$$

$$x^{[0]}(t) = \begin{cases} z(t_0) & \text{при } t \in (t_0, t_1], \\ z(t) & \text{при } t \leqslant t_0. \end{cases}$$

За допомогою послідовних наближень (4) неважко показати, що існує єдиний розв'язок $x(t)$ системи (3), коли $t \in [t_0, t_1]$, який відповідає $z(t)$. При $t \in [t_0, t_1]$ справджується нерівність

$$\|x(t)\| \leqslant \beta + \frac{\bar{\beta}}{1 - d(\lambda)(t_1 - t_0)}. \tag{5}$$

Вважаючи вектор-функцію $x(t)$ початковою, продовжимо розв'язок єдино на відрізок $[t_1, t_2]$, причому для продовження при $t \in [t_1, t_2]$ справджуватиметься нерівність виду (5). І т. д. Звідси випливає, що існує єдиний нескінченно продовжуваний розв'язок системи (3), який відповідає $z(t)$.

Які б не були $\varepsilon > 0$ і $T_0 > t_0$, де T_0 — елемент послідовності $\{t_p\}$, знайдеться $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (3), який відповідає $z \in Z_\lambda$ такому, що $\|z(t)\| < \delta$, при $t \in [t_0, T_0]$ буде $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Нехай $T_0 \in \{t_p\}$ таке, що $T_0 \geqslant \tau_0$ і

$$2\mu a (a + H) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} \Delta_k (\tau)\, d\tau + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} \| A_k (\tau) - B_k (\tau) \|\, d\tau +$$

$$+ \mu \sum_{l=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} h_l (\tau)\, d\tau \leqslant \theta < 1.$$

Нехай δ_0 і δ_1 такі, що $\delta_0 > 0$, $0 < \delta_1 < R$, $\frac{\delta_0 + L(\delta_1, T_0)}{1 - \theta} < R$, де $L(\delta_1, T_0) =$ $= \mu (a + b(T_0))(T_0 - t_0)\delta_1 + \mu H (T_0 - t_0)\delta_1$.

Візьмемо $\delta > 0$ таке, що будь-який розв'язок $x(t)$ системи (3), який відповідає початковій вектор-функції $z \in Z_\lambda$ такій, що $\| z(t) \| < \delta$, при $t \in [t_0, T_0]$ задовольняє нерівність $\| x(t) \| < \delta_1$, а будь-який розв'язок $y(t)$ системи (1) такий, що $\| y(t_0) \| < \delta$, при $t \geqslant t_0$ задовольняє нерівність $| y(t_0) \| < \delta_0$. Множину таких розв'язків системи (3) позначимо через X.

Нехай $x \in X$ — будь-яка. При $t \in [t_0, \infty)$ розв'язок $x(t)$ задовольняє таку систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(\tau) g(x(\bar{\varphi}_k(\tau, x(\tau)))) -$$

$$- B_k(\tau) x(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\tau) F(\tau, x(\bar{\psi}_l(\tau, x(\tau))))\, d\tau, \tag{6}$$

де $y(t)$ — розв'язок системи (1), що задовольняє початкову умову $y(t_0) = z(t_0)$.

Легко показати від супротивного, що при $t \geqslant T_0$ $\| x(t) \| < R$. Звідси випливає, що будь-яка вектор-функція $x \in X$ є розв'язком системи (2).

Нехай $T > T_0$ — будь-який елемент послідовності $\{t_p\}$. Позначимо $\bar{\Delta} = \sup\limits_{t \in [T_0, T]} \| x(t) \|$.

Із рівності (6) при $t \in [T_0, T]$ одержимо таку нерівність $\| x(t) \| \leqslant \delta_0 +$ $+ L_1(\delta_1, T_0) + \theta \bar{\Delta}$, де

$$L_1(\delta_1, T_0) = \mu (a + b(T_0))(T_0 - t_0)\delta_1 + \mu H (T_0 - t_0)\delta_1 +$$

$$+ \mu a (a + H)\delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau + \mu\delta_1 \sum_{l=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau.$$

Тому при $t \in [T_0, T]$

$$\| x(t) \| \leqslant \frac{\delta_0 + L_1(\delta_1, T_0)}{1 - \theta}. \tag{7}$$

Оскільки нерівність (7) не залежить від T, то тривіальний розв'язок системи (2) стійкий по відношенню до Z_λ. Теорему 1 доведено.

Наслідок. *Тривіальний розв'язок системи* (2) *стійкий по відношенню до будь-якої множини* $Z_{\lambda'}$, *якщо* $0 \leqslant \lambda' \leqslant \lambda$.

Теорема 2. *Якщо справджуються умови теореми* 1, *то з асимптотичної стійкості тривіального розв'язку системи* (1) *випливає асимптотична стійкість по відношенню до* Z_λ *тривіального розв'язку системи* (2).

Якщо перетворення аргументу не залежать від шуканої функції, то умови, які гарантують стійкість, можуть бути послаблені.

Поряд із системою (1) розглянемо систему

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) x(\varphi_k(t)) + f(t, x(\psi_l(t))). \tag{8}$$

Умовами ω_1 назвемо сукупність таких умов для системи (8):

1) матриці $A_k(t)$ і вектор-функція $f(t, \xi_l)$ задовольняють умови 1) — 4) з умов ω;

2) функції $\varphi_k(t)$ і $\psi_l(t)$ визначені при $t \in [t_0, \infty)$ і вимірні на будь-якому скінченному відрізку $[t_0, T]$, причому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau < \infty, \text{ де } \Delta_k(t) = |1 - \varphi_k(t)|;$$

3) існує таке число $\tau_0 \geqslant t_0$, що при $t \geqslant \tau_0$ буде $\varphi_k(t) \geqslant t_0$;

4) існує така послідовність $\{t_p\}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, що $\lim\limits_{p\to\infty} t_p = \infty$, $t_p - t_{p-1} < \dfrac{1}{d_1}$ і при $t \in [t_{p-1}, t_p]$ $\varphi_k(t), \psi_l(t) \leqslant t_p$, де $d_1 = a + 2H$.

Теорема 3. *Припустимо, що для системи* (8) *вірні умови* ω_1, *а також умови* 2) — 4) *теореми* 1. *Тоді із стійкості тривіального розв'язку системи* (1) *випливає стійкість по відношенню до* Z *тривіального розв'язку системи* (8).

Доведення. Запровадивши вектор-функцію $F(t, \xi_l)$, як і при доведенні теореми 1, розглянемо систему

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, x(\varphi_k(t)) + F(t, x(\psi_l(t))). \tag{9}$$

Нехай $z \in Z$, причому $\| z(t) \| < R$. Позначимо $\beta = \sup\limits_{t \leqslant t_0} \| z(t) \|$, $\bar{\beta} = \beta (a + H)(t_1 - t_0)$. За допомогою послідовних наближень типу (4) неважко показати, що існує єдиний розв'язок $x(t)$ системи (9), коли $t \in [t_0, t_1]$, що відповідає $z(t)$. При $t \in [t_0, t_1]$ справджується нерівність

$$\| x(t) \| \leqslant \beta + \frac{\bar{\beta}}{1 - d_1(t_1 - t_0)}. \tag{10}$$

Вважаючи вектор-функцію $x(t)$ початковою, продовжимо розв'язок єдиним чином на відрізок $[t_1, t_2]$, причому для продовження при $t \in [t_1, t_2]$ справджуватиметься нерівність виду (10). Звідси випливає, що існує єдиний нескінченно продовжуваний розв'язок системи (9), який відповідає $z(t)$. Які б не були $\varepsilon > 0$ і $T_0 > t_0$, де $T_0 \in \{t_p\}$, знайдеться $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (9), який відповідає $z \in Z$ такій, що $\| z(t) \| < \delta$, при $t \in [t_0, T_0]$ буде $\| x(t) \| < \varepsilon$.

Нехай $T_0 \in \{t_p\}$ таке, що $T_0 \geqslant \tau_0$ і

$$\mu a (a + H) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} \Delta_k(\tau)\, d\tau + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} \| A_k(\tau) - B_k(\tau) \|\, d\tau +$$

$$+ \mu \sum_{l=1}^{\infty} \int_{T_0}^{\infty} h_l(\tau)\, d\tau \leqslant \theta < 1.$$

Візьмемо $\delta_0 > 0$ і $\delta_1 > 0$ — будь-які. Нехай δ, що задовольняє нерівність $0 < \delta \leqslant R$ таке, що будь-який розв'язок $x(t)$ системи (9), який відповідає початковій вектор-функції $z \in Z$ такій, що $\| z(t) \| < \delta$ при $t \in [t_0, T_0]$ задовольняє нерівність $\| x(t) \| < \delta_1$, а будь-який розв'язок $y(t)$ системи (1), що задовольняє початкову умову $y(t_0) = z(t_0)$, при $t \geqslant t_0$ задовольняє нерівність $\| y(t) \| < \delta_0$. Множину розв'язків системи (9), що відповідають початковим вектор-функціям $z \in Z$, які задовольняють нерівність $\| z(t) \| < \delta$, позначимо через X.

Нехай $x \in X$ — будь-яке. Скористаємось рівністю

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(\tau) x(\varphi_k(\tau)) - B_k(\tau) x(\tau))\, d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} Y(t) Y^{-1}(\tau) F(\tau, x(\psi_l(\tau)))\, d\tau,$$

справедливою при $t \geqslant t_0$. Візьмемо будь-яке $T \in \{t_p\}$, $T > T_0$. Тоді при $t \in [T_0, T]$

$$\| x(t) \| \leqslant \frac{\delta_0 + L_1(\delta_1, T_0)}{1 - \theta}. \tag{11}$$

Оскільки нерівність (11) не залежить від T, то тривіальний розв'язок системи (9) стійкий по відношенню до Z, а отже, стійкий по відношенню до Z тривіальний розв'язок системи (8). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Якщо справджуються умови теореми 3, то з асимптотичної стійкості тривіального розв'язку системи* (1) *випливає асимптотична стійкість по відношенню до Z тривіального розв'язку системи* (8).

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 2 з роботи [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. В. П. Скрипник, Об устойчивости нелинейных систем с преобразованным аргументом.— ПММ, 1973, т. 37, № 1.
2. В. П. Скрипник, Об устойчивости некоторых систем с возмущенным аргументом. — Дифференц. уравнения, 1973, т. 9, № 6.
3. В. П. Скрипник, Об устойчивости нелинейных систем нейтрального типа.— ПММ, 1975, т. 39, № 1.
4. В. П. Скрипник, Устойчивость систем со счетным числом преобразований аргумента.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 9, № 5.
5. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
6. Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, «Наука», М., 1971.

Московський лісотехнічний інститут

Надійшла до редакції
22.V 1974 р.