УДК 517.917

В. Т. Яцюк

Існування квазіперіодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь, близьких до точно-інтегровних

Розглянемо неавтономну систему n диференціальних рівнянь, близьку до точно-інтегровної

$$\frac{dx}{dt} = X_1(\nu_1', x) + \varepsilon X_2(\nu_2 t, \ldots, \nu_m t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

де вектор-функція $X_1(\nu_1 t, x)$ — періодична щодо t, а $X_2(\nu_2 t, \ldots, \nu_m t, x, \varepsilon)$ — квазіперіодична щодо t з частотним базисом $(\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_m)$

Системи вигляду (1), як автономні, так і неавтономні, розглядалися в працях Ю. О. Митропольського і О. Б. Ликової [1], де доведені теореми про існування інтегральних многовидів [2] в околах стаціонарного розв'язку, періодичного розв'язку і сім'ї періодичних розв'язків вироджених ($\varepsilon = 0$) систем. Допустимо, що система (1) при $\varepsilon = 0$, тобто система

$$\frac{dx}{dt} = X_1(\nu_1 t, x) \tag{2}$$

має квазіперіодичний розв'язок

$$x = x_0(t) = x_0(\nu_1 t, \beta_1 t, \beta_2 t, \ldots, \beta_\alpha t) \tag{3}$$

з базисом $(\nu_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\alpha)$, $\alpha \leqslant n - 1$. Доведемо існування інтегрального многовиду системи (1) в околі розв'язку (3), користуючись методом прискореної збіжності [3].

Як відомо [4], з того, що система (2) має квазіперіодичний розв'язок (3), випливає існування α — параметричної сім'ї розв'язків $x = x_0(\nu_1 t, \beta_1 t + c_1, \beta_2 t + c_2, \ldots, \beta_\alpha t + c_\alpha)$ системи (2). Тоді вектор-функції $\delta\xi_i = \left.\frac{\partial x_0}{\partial c_i}\right|_{c=0}$ $(i = 1 \div \alpha)$ будуть лінійно незалежними квазіперіодичними розв'язками рівнянь у варіаціях $\frac{d\delta\xi}{dt} = \frac{\partial X_1(\nu_1 t, x_0(\nu_1 t, \beta t))}{dx}\delta\xi$ для системи (2) відносно породжуючого розв'язку (3). Припустимо, що існує квазіперіодична або постійна (див. примітку $(n - \alpha) \times n$ матриця $B(\varphi)$, така, що

$$\det\left[\frac{\partial x_0(\nu_1 t, \varphi)}{\partial\varphi}, B(\varphi)\right] \neq 0. \tag{4}$$

В системі рівнянь (1) зробимо заміну змінних

$$x = x_0(\nu_1 t, \theta) + B(\theta)\, y. \tag{5}$$

Будемо мати

$$\frac{\partial x_0}{\partial(\nu_1 t)}\nu_1 + \frac{\partial x_0}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial B}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}y + B(\theta)\frac{dy}{dt} =$$
$$= X_1[\nu_1 t, x_0(\nu_1 t, \theta) + B(\theta)\, y] + \varepsilon X_2[\nu_2 t, \ldots, \nu_m t, x_0 + B(\theta)\, y, \varepsilon] = \tag{6}$$
$$= X_1(\nu_1 t, x_0(\nu_1 t, \theta)) + \frac{\partial X_1(\nu_1 t, x_0(\nu_1 t, \theta))}{\partial x}B(\theta)\, y + \Phi(\nu_1 t, \ldots, \nu_m t, \theta, y, \varepsilon).$$

Використовуючи тотожність

$$\frac{\partial x_0(\nu_1 t, \varphi)}{\partial(\nu_1 t)}\nu_1 + \frac{\partial x_0(\nu_1 t, \varphi)}{\partial\varphi}\beta = X_1(\nu_1 t, x_0(\nu_1 t, \varphi)),$$

систему (6) зведемо до вигляду

$$\left[\frac{\partial x_0}{\partial\theta}+\frac{\partial B}{\partial\theta}y\right]\left[\frac{d\theta}{dt}-\beta\right]+B(\theta)\frac{dy}{dt}=\left[\frac{\partial X_1}{\partial x}B-\frac{\partial B}{\partial\theta}\beta\right]y+\Phi(\nu_1 t,\ldots,\nu_m t,\theta,y,\varepsilon). \tag{7}$$

Розв'язавши систему (7) відносно $\frac{d\theta}{dt}-\beta$ і $\frac{dy}{dt}$, що можливо в силу умови (4), одержимо

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=L(\theta)y+L_1(y,\theta,\nu_1 t,\nu_2 t,\ldots,\nu_m t,\varepsilon);\\ \frac{d\theta}{dt}&=\beta+M(y,\theta,\nu_1 t,\nu_2 t,\ldots,\nu_m t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{8}$$

Нехай лінійна система з квазіперіодичними коефіцієнтами $\frac{dy}{dt}=L(\varphi)y$ заміною Ляпунова з квазіперіодичною матрицею $Y(\varphi)$ звідна до лінійної системи з постійною матрицею H. Тоді, зробивши в системі (8) заміну змінних $y=Y(\theta)h$, перетворимо її до вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=Hh+F(h,\theta,\nu_1 t,\ldots,\nu_m t,\varepsilon);\\ \frac{d\theta}{dt}&=\beta+f(h,\theta,\nu_1 t,\ldots,\nu_m t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{9}$$

Вводячи додаткову систему $\frac{d\bar{\theta}_i}{dt}=\nu_i$ $(i=1\div m)$, поправки на частоти $\beta=\omega+\Delta(\varepsilon)$ і позначення $\bar{\omega}=(\omega\oplus\nu)$, $\psi=(\theta\oplus\bar{\theta})$, $f_1=\{f^1,\ldots,f^\alpha,0,\underbrace{\ldots,0}_{m}\}$, систему (9) зведемо до такого вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}&=Hh+F(h,\psi,\Delta,\varepsilon);\\ \frac{d\psi}{dt}&=\bar{\omega}+\Delta+f_1(h,\psi,\Delta,\varepsilon).\end{aligned} \tag{10}$$

Функції $F(h,\psi,\Delta,\varepsilon)$ та $f_1(h,\psi,\Delta,\varepsilon)$ системи (10) задовольняють умови

$$|F(h,\psi,\Delta,\varepsilon)|\leqslant C_1h^2+C_2|\Delta|+C_3\cdot\varepsilon;$$

$$|f_1(h,\psi,\Delta,\varepsilon)|\leqslant N_1|h|+N_2|\Delta|+N_3\cdot\varepsilon$$

і, значить, до системи (10) можна застосувати теорему 4 М. М. Боголюбова [3]. Тим самим для системи (1) доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай для системи* (1) *виконуються умови*:

1. *Функції* $X(\nu_1 t,x)$, $X_2(\nu_2 t,\ldots,\nu_m t,x,\varepsilon)$ *аналітичні в деякому околі квазіперіодичного розв'язку* (3).

2. *Частоти* $\bar{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\alpha,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$ *системи* (10) *задовольняють нерівності* $|(k\bar{\omega})|\geqslant K|k|^{-(m+\alpha+1)}$.

3. *Існує постійна, або квазіперіодична* $(n-\alpha)\times n$ *матриця* $B(\varphi)$, *така, що виконується умова* (4)

4. *Всі власні значення матриці* H *системи* (10) *мають від'ємні дійсн частини.*

Тоді можна вказати додатне ε_0, що для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ можна підібрати таке аналітичне $\Delta(\varepsilon)$ в системі (10), при якому система рівнянь (1) буде мати квазіперіодичний розв'язок з частотами $\bar{\omega}$

$$x = Q(\bar{\omega} t + \psi_0, \varepsilon),$$

притягуючий всі достатньо близькі до нього розв'язки при $t \to \infty$.

Примітка. Для зведення системи диференціальних рівнянь (1) в околі квазіперіодичного розв'язку (3) до вигляду (10) істотно використовувалась заміна змінних (5). Існування квазіперіодичної матриці $B(\varphi)$ із властивістю (4) в загальному випадку, напевне, не доведено.

Що стосується доповнення $\alpha \times n$ матриці $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi_i}$ $(i = 1 \div \alpha)$ до $n \times n$ невиродженої матриці за допомогою постійної $(n - \alpha) \times n$ матриці $\bar{B}$, то це можна зробити, наприклад, в тому випадку, коли в матриці $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ знайдеться мінор порядку α, невироджений для всіх $t_0 \leqslant t < \infty$. Нехай для визначеності

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_0^1}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial x_0^1}{\partial \varphi_\alpha} \\ \frac{\partial x_0^2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial x_0^2}{\partial \varphi_\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_0^\alpha}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial x_0^\alpha}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial x_0^\alpha}{\partial \varphi_\alpha} \end{bmatrix} \neq 0 \; (t_0 \leqslant t < \infty).$$

Тоді матрицю $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ можна доповнити до квадратної невиродженої такою постійною $(n - \alpha) \times n$ матрицею

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \alpha \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Интегральные многообразия в нелинейной механике, «Наука», М., 1973.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. 3-е, Физматгиз, М., 1963.
3. Н. Н Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Метод ускореной сходимости в нелинейной механике, «Наукова думка», Киев, 1969.
4. А. А. Андронов, Собрание трудов, Изд-во АН СССР, М., 1956.

Інститут математики
АН УРСР

Надійшла до редакції
6.X 1975 р.