УДК 531.15:517.926:513

В. Н. Лаптинский, А. К. Лапковский

О приближенном решении классических уравнений Родрига—Гамильтона

Дается приближенное решение задачи определения ориентации твердого тела в пространстве по угловой скорости. Получены достаточно простые и эффективные приближенные формулы для определения $\Theta(t)$ — вектора конечного поворота при задании $\Theta(0)$.

1. Рассмотрим, следуя [1, стр. 120], классические уравнения Родрига—Гамильтона, записанные в матричной форме

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = A(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\lambda}, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \tag{2}$$

$$A(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega^1 & -\omega^2 & -\omega^3 \\ \omega^1 & 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ \omega^2 & -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^3 & \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — параметры Родрига — Гамильтона, задающие поворот правого ортогонального трехгранника, связанного с подвижным телом, от некоторого начального положения в момент времени $t = 0$; $\omega^1(t)$, $\omega^2(t)$, $\omega^3(t)$ — проекции угловой скорости тела на оси связанного трехгранника. Интегрирование системы (1) определяет ориентацию тела в пространстве, если известна его ориентация в начальный момент времени.

Действительно, четырехмерному вектору $\boldsymbol{\lambda}(t)$ ставится в соответствие (см. [1, стр. 102]) вектор конечного поворота

$$\Theta(t) = 2\mathbf{e}(t)\,\mathrm{tg}\,\frac{\chi(t)}{2}, \ |\mathbf{e}| = 1, \tag{4}$$

где

$$\cos\frac{\chi}{2} = \lambda_0, \ \cos\alpha_s \sin\frac{\chi}{2} = \lambda_s, \ s = 1, 2, 3. \tag{5}$$

(Здесь α_s — углы оси поворота $\mathbf{e}(t)$ с осями координат; χ — угол конечного поворота.)

Для дальнейшего имеет смысл рассмотреть трехмерный вектор $\boldsymbol{\nu}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}$. Тогда из (5) следует

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \mathbf{e}(t)\sin\frac{\chi}{2}, \ \lambda_0 = \cos\frac{\chi}{2}.$$

2. Введя скалярный параметр ρ, систему (1) запишем так:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \rho A(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\lambda}. \tag{6}$$

Введение параметра ρ приводит к тому, что имеем дело с вектором угловой скорости $\rho\boldsymbol{\omega}(t)$.

Решение системы (6) ищем (см. [2]) в виде

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \exp\Phi(t, \rho)\,\boldsymbol{\lambda}(0), \tag{7}$$

$$\Phi(t, \rho) = \rho\Phi_1(t) + \rho^2\Phi_2(t) + \ldots, \tag{8}$$

причем матрицы $\Phi_k(t)$, $\Phi_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, подлежат определению.

Подставляя значение $\boldsymbol{\lambda}(t)$ из (7) в систему (6), получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} K^{(s-1)} = \rho A, \quad A = A(\boldsymbol{\omega}(t)), \tag{9}$$

где

$$\frac{d \exp \Phi}{dt} \exp(-\Phi) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} K^{(s-1)},$$

$$K^{(0)} = \frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}, \quad K^{(1)} = \dot{\Phi}\Phi - \Phi\dot{\Phi} = [\dot{\Phi}, \Phi], \ldots \tag{10}$$

$$K^{(s)} = [K^{(s-1)}, \Phi], \ldots \tag{11}$$

Из (9) с учетом структуры матрицы $\Phi(t, \rho)$ последовательно находим искомые матрицы

$$\Phi_1 = \int_0^t A(\tau)\, dt = \widetilde{A}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \int_0^t [A(\tau), \widetilde{A}(\tau)]\, d\tau, \tag{12}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{4} \int_0^t [A(\tau), \int_0^\tau [A(\sigma), \widetilde{A}(\sigma)]\, d\sigma]\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{12} \int_0^t [[A(\tau), \widetilde{A}(\tau)]\, \widetilde{A}(\tau)]\, d\tau \tag{13}$$

и т. д.

Вообще

$$\Phi_m = F(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m-1}, \dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2, \ldots, \dot{\Phi}_{m-1}). \tag{14}$$

По виду системы (9) нетрудно убедиться, что матрицы $\Phi_m(t)$ имеют коммутаторную структуру. Очевидно, что порядок малости относительно t матриц $\Phi_m(t)$ равен m, т. е.

$$\Phi(t, \rho) = \rho\Phi_1(t) + \rho^2\Phi_2(t) + \ldots + \rho^{m-1}\Phi_{m-1}(t) + O(t^m). \tag{15}$$

Равномерная по ρ, t сходимость ряда (15) следует из теоремы 2.1 работы [3].

Результаты работы [2] позволяют исследовать необходимое и достаточное условие, при котором малая m-го порядка $O(t^m)$ в равенстве (15) тождественно равна нулю. Например, при $m = 2$ это условие сводится к соотношению

$$\int_0^1 \sigma \exp(-\sigma\widetilde{A}(t))\, [A(t), \widetilde{A}(t)] \exp(\sigma\widetilde{A}(t))\, d\sigma = 0. \tag{16}$$

При выполнении условия (16) матрица $\exp \int_0^t A(\tau)\, d\tau$ является фундаментальной для уравнения (1); верно и обратное, т. е. если матрица $\exp \int_0^t A(\tau)\, d\tau$ является фундаментальной для (1), то имеет место (16).

3. Все матрицы Φ_m, $m=1, 2, \ldots$, являются элементами алгебры L, изоморфной векторной алгебре пространства R_3.

Каждому вектору $\mathbf{a}\{a^1, a^2, a^3\}$ из пространства R_3 соответствует матрица $A(\mathbf{a}) \in L$:

$$A(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \\ a^1 & 0 & a^3 & -a^2 \\ a^2 & -a^3 & 0 & a^1 \\ a^3 & a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Коммутатору матриц из алгебры L соответствует векторное произведение отвечающих им векторов.

Легко видеть, что соответствующими векторами для матриц Φ_1, Φ_2, $\Phi_3, \ldots$ будут следующие:

$$\Omega_1 = \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau = \widetilde{\omega}(t),$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\int_0^t \omega(\tau) \times \widetilde{\omega}(\tau)\, d\tau,$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{4}\int_0^t \omega(\tau) \times \int_0^\tau \omega(\sigma) \times \widetilde{\omega}(\sigma)\, d\sigma\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{12}\int_0^t (\omega(\tau) \times \widetilde{\omega}(\tau)) \times \widetilde{\omega}(\tau)\, d\tau,$$

. . . .

Здесь знак «$\times$» — знак векторного произведения. В общем случае матрице $\Phi(t, \rho)$ соответствует вектор

$$\Omega(t, \rho) = \int_0^t \Big\{\rho\omega(\tau) + \frac{1}{2}\rho^2\omega(\tau) \times \widetilde{\omega}(\tau) +$$

$$+ \rho^3\Big(\frac{1}{4}\omega(\tau) \times \int_0^\tau \omega(\sigma) \times \widetilde{\omega}(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{12}(\omega(\tau) \times \widetilde{\omega}(\tau)) \times \widetilde{\omega}(\tau)\Big)\Big\}\, d\tau + \ldots$$

4. Известно (см. [1, стр. 110]), что решения $\lambda(t, \rho)$ системы (1) имеют структуру кватернионов вида:

$$\lambda(t, \rho) = \Big\{\cos\frac{\chi}{2}, \quad \sin\frac{\chi}{2} e\Big\},$$

где e — мнимый кватернион, по модулю равный единице.

Поставим в соответствие вектору $\mathbf{\Omega}(t, \rho)$ кватернион λ_Ω по правилу:

$$\mathbf{\Omega}(t, \rho) \Rightarrow \lambda_\Omega = \Big\{\cos\frac{\Omega^*}{2}, \ \sin\frac{\Omega^*}{2} e_\Omega\Big\}, \ \Omega^* = |\mathbf{\Omega}|, \tag{19}$$

где e_Ω — мнимый кватернион, отождествленный с вектором $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{\Omega}}{\Omega^*}$.

Тогда, производя линейное преобразование матрицей $\exp \Phi(t, \rho)$ кватерниона $\lambda(0) = \left\{\cos\frac{\chi_0}{2},\ \sin\frac{\chi_0}{2} e_0\right\}$ ($\lambda(0)$ рассматриваем как вектор-столбец) получим искомый кватернион $\lambda(t, \rho) = \left\{\cos\frac{\chi}{2},\ \sin\frac{\chi}{2} e\right\}$ в виде

$$\cos\frac{\chi}{2} = \cos\frac{\chi_0}{2}\cos\frac{\Omega^*}{2} - (e_0, e_\Omega)\sin\frac{\Omega^*}{2}\sin\frac{\chi_0}{2}, \tag{20}$$

$$\sin\frac{\chi}{2} e = \sin\frac{\chi_0}{2}\cos\frac{\Omega^*}{2} e_0 + \sin\frac{\Omega^*}{2}\cos\frac{\chi_0}{2} e_\Omega +$$

$$+ \sin\frac{\chi_0}{2}\sin\frac{\Omega^*}{2} e_0 \times e_\Omega. \tag{21}$$

Здесь (e_0, e_Ω) — скалярное произведение кватернионов e_0, e_Ω; $e_0 \times e_\Omega$ — мнимый кватернион, отождествляемый с векторным произведением соответствующих векторов $\mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_\Omega$.

Но формулы (20), (21) определяют (см., например, [4, с. 665]) умножение кватернионов λ_0, λ_Ω. В силу группового характера множества кватернионов, имеющих модуль 1, $\lambda(t, \rho)$ удовлетворяют условию нормирования (2).

Итак, *решение системы* (1) *определяется формулой*

$$\lambda(t, \rho) = \lambda_0 \lambda_\Omega,$$

где $\lambda_0 = \lambda(0)$ — *начальное значение, а* λ_Ω *строится по правилу* (19) *с использованием* (18).

Если λ_0 — кватернион 1, то $\lambda(t, \rho) = \lambda_\Omega$.

Замечание 1. Рассмотренный метод следует отнести ко второй группе приближенных методов решения кинематических уравнений, классифицированных в [5, с. 150]. Следует заметить, что метод из [5] исходит из специфики пространства R_3, в то время как используемый здесь метод применим в произвольном R_n, в частности, в пространствах теории относительности (см., например, [6]), а значит, он более универсальный.

Замечание 2. Отметим, что результаты работы [2], применяемые в предлагаемой заметке, развивают метод В. Магнуса [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, М., 1961.
2. В. Н. Лаптинский, О линейных дифференциальных системах, Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 2.
3. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
4. М. М. Постников, Аналитическая геометрия, «Наука», М., 1973.
5. В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский, Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела, «Наука», М., 1973.
6. А. К. Лапковский, В. Н. Лаптинский, О горизонтальных путях и «прецессии Томаса» в теории гравитации, Изв. вузов, Физика, 1975, № 1.
7. W. Magnus, On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator, Commun. Pure and Appl. Mathem., 7, 649, 1954.

Могилевский филиал Института физики
АН БССР,
Могилевский педагогический институт

Поступила в редакцию 29.VII 1974 г.,
после переработки — 23.XI 1975 г.