УДК 517.9

С. Д. Милушева, Д. Д. Байнов

Применение метода усреднения для решения многоточечных краевых задач с линейным краевым условием для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, не разрешенных относительно производной

В данной работе обоснован метод усреднения для решения многоточечных краевых задач для одного класса интегро-дифференциальных уравнений стандартного вида.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X\left(t, x(t), \dot{x}(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds\right) \tag{1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=0}^{N} A_i x(t_i) = 0, \tag{2}$$

где $x, X \in R_n$, $\varphi \in R_p$, $A_i = (a_{jk}^{(i)})_1^n$, $t_i = \alpha_i T$, $i = \overline{0, N}$, $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = 1$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L = \mathrm{const}$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Первая схема усреднения. Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\left(t, x, y, \int_0^t \varphi(t, s, x, y)\, ds\right) dt = \overline{X}(x, y). \tag{3}$$

Системе (1) ставим в соответствие усредненную систему

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t), 0) \tag{4}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=0}^{N} A_i \xi(t_i) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что если $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ и $A = (a_{jk})_{lm}$, то по определению

$$\| x \| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \| A \| = \left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{jk}^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем теорему о близости решений краевых задач (1), (2) и (4), (5).

Теорема 1. *Пусть:*

1. *Функция* $X(t, x, y, z)$ *определена и непрерывна в области* $\Omega(t, x, y, z) = \Omega(t) \times \Omega(x) \times \Omega(y) \times \Omega(z)$, *где* $\Omega(t) = [0, \infty)$, $\Omega(x)$ и $\Omega(y)$ — *некоторые открытые области пространства* R_n, $\Omega(z) \equiv R_m$.

Функция $\varphi(t, s, x, y)$ *определена и непрерывна в области* $\Omega(t, s, x, y) = \Omega(t) \times \Omega(s) \times \Omega(x) \times \Omega(y)$, где $\Omega(s) = [0, \infty)$.

2. *Функции* $X(t, x, y, z)$ *и* $\varphi(t, s, x, y)$ *удовлетворяют в соответствующих проекциях области* $\Omega(t, s, x, y, z)$ *условия*

$$\| X(t, x, y, z) \| \leqslant M = \mathrm{const},$$

$$\| X(t, x, y, z) - X(t, x', y', z') \| \leqslant \lambda [\| x - x' \| + \| y - y' \| + \| z - z' \|],$$

$$\lambda = \mathrm{const},$$

$$\| \varphi(t, s, x, y) - \varphi(t, s, x', y') \| \leqslant \mu(t, s) [\| x - x' \| + \| y - y' \|],$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \mu(\tau,s)\,ds=0.$$

3. *Краевая задача* (1), (2) *имеет единственное, непрерывное решение* $x(t)$ *и* $x(t)\in\Omega(x)$ *при* $t\in[0,T]$.

4. *В каждой точке* $(x,y)\in\Omega(x,y)$ *существует предел* (3) *и*

$$\|\overline{X}(x,y)-\overline{X}(x',y)\|\leqslant\nu\|x-x'\|,\quad \nu=\text{const}.$$

5. *Краевая задача* (4), (5) *имеет единственное, непрерывное решение* $\xi(t)$ *и* $\xi(t)\in\Omega(x)$ *при* $t\in[0,T]$.

6. $A_0=\text{const}$, $\det A_0\neq 0$.

7. *Матрицы* $A_i, i=\overline{1,N}$, *зависят от* ε, *функция* $b(\varepsilon)=\max\limits_{i=\overline{1,N}}\|A_i(\varepsilon)\|$ *непрерывна при достаточно малых значениях* ε *и* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}b(\varepsilon)=0$.

Тогда для любых $\eta>0$ и $L>0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0>0$, *что при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ *на отрезке* $0\leqslant t\leqslant T$ *справедливо неравенство*

$$\|x(t)-\xi(t)\|<\eta.$$

Доказательство. В силу условий теоремы для решений краевых задач (1), (2) и (4), (5) выполнены равенства

$$x(t)=x_0+\varepsilon\int_0^t X(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x(s),\dot{x}(s))\,ds)\,d\tau,\tag{6}$$

$$\xi(t)=\xi_0+\varepsilon\int_0^t\overline{X}(\xi(\tau),0)\,d\tau,\tag{7}$$

где

$$x_0=-\varepsilon A^{-1}(\varepsilon)\sum_{i=1}^N A_i(\varepsilon)\int_0^{t_i}X(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x(s),\dot{x}(s))\,ds)\,d\tau,$$

$$\xi_0=-\varepsilon A^{-1}(\varepsilon)\sum_{i=1}^N A_i(\varepsilon)\int_0^{t_i}\overline{X}(\xi(\tau),0)\,dt,\quad A(\varepsilon)=\sum_{i=0}^N A_i(\varepsilon).$$

Из условий теоремы и (6) и (7), при достаточно малых значениях ε ($0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$) следует неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant\varepsilon h(\varepsilon)\sum_{i=1}^N\left\|\int_0^{t_i}\left[X(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x(s),\dot{x}(s))\,ds)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{X}(\xi(\tau),0)\right]d\tau\right\|+\varepsilon\left\|\int_0^t\left[X(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x(s),\dot{x}(s))ds)-\overline{X}(\xi(\tau),0)\right]d\tau\right\|,\tag{8}$$

в котором $h(\varepsilon)=b(\varepsilon)\|A_0^{-1}\|\|Q^{-1}(\varepsilon)\|$, $\quad Q(\varepsilon)=E+A_0^{-1}\sum\limits_{i=1}^N A_i(\varepsilon)$, $\det Q(\varepsilon)\neq 0$ и E — единичная матрица.

Оценим второе слагаемое в правой стороне неравенства (8). Имеем

$$\varepsilon\left\|\int_0^t\left[X(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x(s),\dot{x}(s))\,ds)-\overline{X}(\xi(\tau),0)\right]d\tau\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left\|\int_0^t\left[X(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x(s),\dot{x}(s))\,ds)-\right.\right.$$

$$-X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s), 0)\, ds\right)\Big]\, dt\,\| + \varepsilon \left\| \int_0^t \Big[X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s), 0)\, ds\right) - \right.$$

$$- X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau), 0)\, ds\right) \Big] dt \| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau), 0)\, ds\right) - \overline{X}(\xi(\tau), 0) \right] d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \left\{ \| x(\tau) - \xi(\tau) \| + \| \dot{x}(\tau) \| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) [\| x(s) - \xi(s) \| + \| \dot{x}(s) \|]\, ds \right\} d\tau +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s) \| \xi(s) - \xi(\tau) \|\, ds + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s), 0)\, ds\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \overline{X}(\xi(\tau), 0) \right] d\tau \right\| \leqslant \varepsilon\lambda LM + \varepsilon\lambda M\delta(\varepsilon) + \lambda LM\delta(\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau), 0)\, ds\right) - \overline{X}(\xi(\tau), 0) \right] d\tau \right\| +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\| x(\tau) - \xi(\tau) \| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \| x(s) - \xi(s) \|\, ds \right] d\tau, \tag{9}$$

где

$$\mu_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds, \quad \delta(\varepsilon) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \tau\mu_0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \delta(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Можно показать [1], что любому положительному ε можно поставить в соответствие функцию $a(\varepsilon, m)$ ($a(\varepsilon, m) \to 0$ при $m \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$), где m — натуральное число, для которой выполнено неравенство

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \left[X\left(\tau, \xi(\tau), 0, \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau), 0)\, ds\right) - \overline{X}(\xi(\tau), 0) \right] d\tau \right\| \leqslant a(\varepsilon, m) \tag{10}$$

Введя обозначение $c(\varepsilon, m) = \varepsilon\lambda LM + (\varepsilon + L)\lambda M\delta(\varepsilon) + a(\varepsilon, m)$, неравенство (9) можно записать в виде

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \left[X - \left((\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds \right) - \overline{X}(\xi(\tau), 0) \right] d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant c(\varepsilon, m) + \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\| x(\tau) - \xi(\tau) \| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \| x(s) - \xi(s) \|\, ds \right] d\tau. \tag{11}$$

Видим, что (11) выполнено для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ включительно и для всех $t_i, i = \overline{0, N}$.

Положим $c(\varepsilon, m)\, u(t) = x(t) - \xi(t)$ и введем обозначение $\| u \|_T = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \| u(t) \|$. Тогда из (8), имея ввиду (11), получаем

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant c(\varepsilon, m) \{ 1 + h(\varepsilon) [N + \lambda(\alpha L + N\delta(\varepsilon)) \| u \|_T] \} +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\| x(\tau) - \xi(\tau) \| + \int_0^\tau \mu(\tau, s) \| x(s) - \xi(s) \| ds \right] d\tau, \quad \alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i. \tag{12}$$

Из (12) следует неравенстсво

$$\|u(t)\| \leqslant 1 + h(\varepsilon)[N + \lambda(\alpha L + N\delta(\varepsilon))\|u\|_T] + \varepsilon\lambda \int_0^t \left[\|u(\tau)\| + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\|u(s)\| ds \right] d\tau. \tag{13}$$

Применяя лемму 1.7 [1, стр. 80] к неравенству (13), получаем

$$\|u(t)\| \leqslant \{1 + h(\varepsilon)[N + \lambda(\alpha L + N\delta(\varepsilon))\|u\|_T\} \exp\left\{\varepsilon\lambda \int_0^t \left[1 + \int_0^\tau \mu(\tau, s) ds\right] d\tau\right\}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_T \leqslant \{1 + h(\varepsilon)[N + \lambda(\alpha L + N\delta(\varepsilon))\|u\|_T\} \exp\{\lambda(L + \delta(\varepsilon))\}. \tag{14}$$

Так как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h(\varepsilon) = 0$, то существует число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$ выполняется неравенство

$$\lambda(\alpha L + N\delta(\varepsilon)) h(\varepsilon) \exp\{\lambda(L + \delta(\varepsilon))\} < 1.$$

Тогда из (14) получаем

$$\|u\|_T \leqslant \frac{(1 + Nh(\varepsilon)) \exp\{\lambda(L + \delta(\varepsilon))\}}{1 - \lambda(\alpha L + N\delta(\varepsilon)) h(\varepsilon) \exp\{\lambda(L + \delta(\varepsilon))\}} = \Delta,$$

т. е. $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant c(\varepsilon, m)\Delta$.

Выберем m и $\varepsilon_3 > 0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $c(\varepsilon_3, m)\Delta < \eta$.

Тогда из этого неравенства при $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ следует утверждение теоремы 1.

Вторая схема усреднения. Предположим, что в элементарных или специальных функциях можно вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \varphi(t, s, x, y) ds = \varphi_1(t, x, y),$$

считая t, x и y параметрами. Тогда, если существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y, \varphi_1(t, x, y)) dt = \overline{X}(x, y), \tag{15}$$

то усредненной системой первого приближения для системы (1) назовем систему

$$\dot{\xi}(t) = \varepsilon \overline{X}(\xi(t), 0) \tag{16}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=0}^N A_i \xi(t_i) = 0. \tag{17}$$

Справедлива следующая теорема о близости решений краевых задач (1), (2) и (16), (17).

Теорема 2. *Пусть:*

1. *Выполнены условия* 1, 2, 3, 6 и 7 *теоремы* 1.
2. *В каждой точке* $(x, y) \in \Omega(x, y)$ *существует предел* (15) *и*

$$\|\overline{X}(x, y) - \overline{X}(x', y)\| \leqslant \nu \|x - x'\|, \quad \nu = \text{const}.$$

3. *Краевая задача* (16), (17) *имеет единственное, непрерывное решение* $\xi(t)$ и $\xi(t) \in \Omega(x)$ при $t \in [0, T]$.

4. *По траектории краевой задачи* (16), (17) *выполнено условие*

$$\int_0^t d\tau \left\| \int_\tau^\infty \varphi(\tau, s, \xi(\tau), 0)\, ds \right\| \leqslant t\tilde{\psi}(t), \quad \tilde{\psi}(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

5. *Функция* $\varphi_1(t, x, y)$ *удовлетворяет в области* $\Omega(t, x, y)$ *условию Липшица*

$$\|\varphi_1(t, x, y) - \varphi_1(t, x', y)\| \leqslant \beta \|x - x'\|, \quad \beta = \text{const}.$$

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$ *справедливо неравенство*

$$\|x(t) - \xi(t)\| < \eta.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание. Надо отметить, что метод усреднения для решения задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений впервые обосновал А. Н. Филатов [2]. Обширная библиография по этой тематике имеется в его монографии [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Филатов, Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1971.
2. А. Н. Филатов, К усреднению в системах интегро-дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 10.

София,
Высший машино-электротехнический институт,
Медицинская академия

Поступила в редакцию 26.VIII 1974 г.