УДК 517.946

А. С. Фохт

Интегральные оценки решений линейных однородных уравнений эллиптического типа любого порядка в метрике L_p, $p>2$

Введение. Данная работа является продолжением ряда ранее выполненных автором работ [1—6], началом для которых послужила статья С. М. Никольского [7], посвященная интегральным оценкам производных гармонической функции, заданной на ограниченной области, и имеет целью получить следующую интегральную оценку для решений u однородных линейных уравнений эллиптического типа любого порядка $2l$ с переменными коэффициентами, заданных на ограниченной области $G \subset R_n$:

$$\left(\frac{1}{m}\int_G |D^s u|^p t^{sp} dx\right)^{\frac{1}{p}} < C_{s,p}(\gamma)\left(\frac{1}{m}\int_G |u|^{p+\gamma} dx\right)^{\frac{1}{p+\gamma}}, \tag{1}$$

где $D^s u = \sum\limits_{\sum_{j=1}^{n} \nu_j = s} |D^s_\nu u|$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, $p > 2$, $s = 1, 2, \ldots$; $dx = dx_1, \ldots, dx_n$; $t = t(x)$ — расстояние от точки интегрирования $x \in G$ до границы Γ области G; $C_{s,p}(\gamma) > 0$ — константа, не зависящая ни от области G, ни от оцениваемой функции u; $m = \operatorname{mes} G$; $\gamma > 0$ — любое сколь угодно малое число.

Ранее [2, 1] при $p = 2$ для упомянутых решений u была получена оценка:

$$\left(\frac{1}{m}\int_G |D^s u|^2 t^{2s} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_s\left(\frac{1}{m}\int_G |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Кроме того, для полигармонических функций [4] при любых p из интервала $1 < p < +\infty$ и отдельно для решений однородных уравнений эллиптического типа второго порядка при $p \geqslant 2$ была получена оценка [3]:

$$\left(\int_G |D^s v|^p t^{sp} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_{s,p}\left(\int_G |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

В случае $l > 2$ и $p > 2$ до настоящего времени оценка типа (2), (3) для решений однородных линейных уравнений эллиптического типа общего вида получена не была. В данной работе она получена в виде оценки (1).

1. Зададим систему действительных чисел: ε_ν, $p^{(\nu)}_{s,j}$, $\beta^{(\nu)}_{s,j}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$0 < \varepsilon_\nu < 1; \text{ все числа } p^{(\nu)}_{s,j} \geqslant 2;$$

$$\frac{2}{p^{(\nu)}_{s,j+1}} = \frac{1}{p^{(\nu)}_{s-1,j+1}} + \frac{1}{p^{(\nu)}_{s+1,j}} \quad (s = 2, 3, \ldots, \nu; \quad j = 1, 2, \ldots, k);$$

$$p^{(\nu)}_{s,0} = 2 \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$$p^{(\nu)}_{\nu+1,k} = 2 \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{4}$$

$$p^{(\nu)}_{s,j+1} = (1 + \varepsilon_\nu)\, p^{(\nu)}_{s+1,j} \quad (j = 0, 1, \ldots, k; \quad s = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$$\beta^{(\nu)}_{s,1} = p^{(\nu)}_{s-1,1} \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$$\beta^{(\nu)}_{1,k} = p^{(\nu)}_{0,k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 1. *Последовательность $\{p^{(\nu)}_{s,k}\}$ монотонно возрастает с ростом k и имеет место формула:*

$$\lim_{k \to +\infty} p^{(\nu)}_{s,k} = a^{(\nu)}_s + 2\frac{1 + \nu\varepsilon_\nu}{1 + (s-1)\varepsilon_\nu} \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{5}$$

Лемма 2. *Для всех достаточно гладких функций, заданных на ограниченной области $G \subset R_n$, имеет место неравенство (теорема вложения):*

$$I_k^2(p_{s,j+1}^{(\nu)}) \leqslant C_k [I_{k+1}(p_{s-1,j+1}^{(\nu)}) I_{k-1}(p_{s+1,j}^{(\nu)}) + I_{k-1}^2(p_{s,j+1}^{(\nu)})], \tag{6}$$

где

$$\frac{2}{p_{s,j+1}^{(\nu)}} = \frac{1}{p_{s-1,j+1}^{(\nu)}} + \frac{1}{p_{s+1,j}^{(\nu)}}; \tag{7}$$

$C_k > 0$ — константа, не зависящая ни от функции f, ни от области G; $p_{s,j}^{(\nu)} \geqslant 2$ определены соотношением (4);

$$I_k(p) = I_k(p, f) = \left(\frac{1}{m}\int\limits_G |D^k f|^p t^{kp} dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Лемма 3. *Для решения и линейного однородного уравнения эллиптического типа любого порядка $2l$, заданного на ограниченной области $G \subset R_n$, имеет место неравенство:*

$$I_s(p_{s,k}^{(\nu)}) < C_1 \cdot I_0(\beta_{1,k}^{(\nu)}). \tag{9}$$

Здесь числа $p_{s,k}^{(\nu)}$ и $\beta_{1,k}^{(\nu)}$ определены соотношениями (4).

При доказательстве этой леммы существенную роль играет ранее полученное неравенство (2), которое можно переписать в виде

$$I_s(2) \leqslant C_s \cdot I_0(2), \tag{10}$$

а также неравенства

$$\beta_{1,k+1}^{(\nu)} > \beta_{1,k}^{(\nu)}; \qquad p_{s+1,j}^{(\nu)} < p_{s,j}^{(\nu)}; \qquad \beta_{s,1}^{(\nu)} > p_{s,1}^{(\nu)},$$

которые следуют из определения (4) входящих сюда величин.

Лемма 4. *Для любых наперед заданных чисел $p > 2$, $s \geqslant 1$ и сколь угодно малого числа $\gamma > 0$ можно так выбрать числа ν, ε_ν и последовательность $\{p_{s,k}^{(\nu)}\}$, что при достаточно большом k будут выполняться неравенства:*

$$p + \frac{\gamma}{4} < \beta_{1,k}^{(\nu)} < p + \gamma, \qquad p + \frac{\gamma}{4} < p_{s,k}^{(\nu)} < p + \frac{\gamma}{2}.$$

Из соотношений (9) и (11) следует, что

$$I_s(p) < I_s\left(p + \frac{\gamma}{4}\right) < I_s(p_{s,k}^{(\nu)}) < C_1 I_0(\beta_{1,k}^{(\nu)}) < C_1 I_0(p + \gamma),$$

что и требовалось доказать.

Результаты этой статьи были доложены на Всесоюзном симпозиуме по теоремам вложения и их приложениям, проводившимся в Алма-Ате в 1973 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Фохт, Некоторые неравенства для решений уравнений эллиптического типа и их производных вблизи границы области в метрике L_2, Труды Математического ин-та АН СССР, 1965, т. 77.
2. А. С. Фохт, Некоторые теоремы вложения для решений уравнений эллиптического типа, Труды Математического ин-та АН СССР, 1969, т. 105.
3. А. С. Фохт, Интегральные оценки обобщенных производных решений уравнений эллиптического типа второго порядка в метрике L_p и некоторые теоремы вложения, связанные с ними, Труды математического ин-та АН СССР, 1972, т. 117.
4. А. С. Фохт, Интегральные оценки производных полигармонической функции в n-мерной области в метрике L_p и некоторые их приложения, Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 8.

5. А. С. Ф о х т, Интегральные оценки производных решений уравнений эллиптического типа с пониженными требованиями на класс гладкости границы области, УМЖ, 1972, т. 24, № 6.
6. А. С. Ф о х т, Интегральная оценка производных гармонической функции N-мерной области в метрике L_2 в некоторые ее приложения, Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 7.
7. С. М. Н и к о л ь с к и й, Об одной граничной оценке для гармонической в n-мерной области функции, Сиб. матем. ж., 1960, т. 1, № 1.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 30.XII 1974 г.