5. А. С. Фохт, Интегральные оценки производных решений уравнений эллиптического типа с пониженными требованиями на класс гладкости границы области, УМЖ, 1972, т. 24, № 6.
6. А. С. Фохт, Интегральная оценка производных гармонической функции N-мерной области в метрике L_2 в некоторые ее приложения, Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 7.
7. С. М. Никольский, Об одной граничной оценке для гармонической в n-мерной области функции, Сиб. матем. ж., 1960, т. 1, № 1.

Московский физико-технический институт Поступила в редакцию 30.XII 1974 г.

УДК 517.91/.943

Д. Я. Хусаинов, О. Е. Цитрицкий

Некоторые обобщения второго метода А. М. Ляпунова

Одним из хорошо изученных и широко применяемых методов исследования устойчивости движения является второй метод А. М. Ляпунова. Неоднократно предпринимались попытки различных обобщений понятия устойчивости и соответственно метода А. М. Ляпунова. Например, Д. Башо [1] предложил унифицированное определение устойчивости, П. Хабетс и К. Пейффер [2] рассмотрели классификацию свойств устойчивости, ограниченности и притяжения, В. И. Зубов [3] исследовал устойчивость общих динамических систем, В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский [4] предложили свойство RR°-устойчивости системы процессоров и принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. В [5, 6] дано определение устойчивости, основанное на понятии квазифильтра, включающее многие из известных видов устойчивости. Введена обобщенная функция Ляпунова, позволяющая сформулировать условия устойчивости. В данной статье предпринята попытка дать еще более широкое понятие устойчивости, учитывающее возможность возмущения системы.

1. Пусть X — некоторое множество и $G(X)$ — множество всех непустых подмножеств множества X. Рассмотрим множество F всех отображений $f: X \to G(X)$.

Определение 1. Назовем множество $\mathfrak{E}$ (соответственно $\mathfrak{H}$) любых непустых подмножеств из X (из F) квазифильтром на X (на F (ср. [5]).

Если к тому же пересечение произвольных двух элементов множества $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{H}$) содержит некоторый элемент из $\mathfrak{E}$ (из $\mathfrak{H}$), то множество $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{H}$) называется базисом фильтра на X (на F) [7].

Если $\mathfrak{H} = \{H\}$ — базис фильтра на F, а $\mathfrak{E} = \{E\}$ — базис фильтра на X, то определим базис фильтра $\mathfrak{H}(\mathfrak{E})$ на X следующим образом:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{E}) = \left\{H(E) : H(E) = \bigcup_{h \in H, x \in E} h(x)\right\}. \tag{1}$$

Определение 2. Если $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X, то $\mathfrak{E}_1$ слабее чем $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$, если для произвольного $E_1 \in \mathfrak{E}_1$ найдется $E_2 \in \mathfrak{E}_2$ такое, что $E_2 \subseteq E_1$.

Если одновременно $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{E}_2 < \mathfrak{E}_1$, то базисы фильтров $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ называются эквивалентными.

Как видно из определения, отношение ($<$) является транзитивным, т. е. если $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{E}_2 < \mathfrak{E}_3$, то и $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_3$.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{H}$ — базис фильтра на F, а $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X. Пара $(X, \mathfrak{H})$ называется $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивой если $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{H}(\mathfrak{E}_2)$.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Пусть на множестве M евклидового пространства R^n задано дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$. Будем предполагать, что выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения уравнения и $f(0) = 0$.

Как известно, решение $x = 0$ называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$ такие, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $\widetilde{x}(t)$ выполняется $\|\widetilde{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, лишь только $\|\widetilde{x}(0)\| < \delta(\varepsilon)$ и $\|\dot{\widetilde{x}}(t) - f(\widetilde{x}(t))\| < \eta(\varepsilon)$.

В данном случае $X = M$, и, если базис фильтра $\mathfrak{H} = \{H_\eta\}$ на F состоит из отображений вида

$$H_\eta = \{\widetilde{x}(0) \to L_{\widetilde{x}(0)} : \|\dot{\widetilde{x}}(t) - f(\widetilde{x}(t))\| < \eta\}, \quad 0 < \eta < \infty,$$

где $L_{\widetilde{x}(0)}$ — положительная полутраектория движения $\widetilde{x}(t)$, проходящего при $t = 0$ через $\widetilde{x}(0)$, а $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ являются базисами фильтров окрестностей точки $x = 0$ в $M \subset R^n$, то определение 3 приводит к определению устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Пример 2. Инвариантное множество $Y \subseteq X$ непрерывной группы преобразований (X, T, h) называется устойчивым относительно множества $Z \subseteq X$, если для произвольной окрестности U множества Y существует окрестность W множества Y такая, что образы точек из $W \cap Z$ при всех преобразованиях группы h лежат в U.

Здесь в качестве базиса фильтра $\mathfrak{E}_1$ можно взять базис фильтров окрестностей множества Y, в качестве $\mathfrak{E}_2$ — базис фильтра, индуцированный в Z базисом $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{H} = \{h\}$.

Пример 3. Пусть процесс описывается функцией $x(p, t)$, $p \in M \subset R^n$, $t \in [0, +\infty)$, удовлетворяющей соотношению $\frac{\partial x}{\partial t} = F[x]$ и заданным начальным и граничным условиям. Здесь F — некоторый оператор, причем $F[0] = 0$. Рассмотрим вещественный функционал $\rho[x(p, t)]$, определенный для каждого фиксированного момента времени $t \geqslant 0$ на множестве функций $X = \{x(p)\}$, удовлетворяющий условиям:

а) $\rho[x(p, t)] \geqslant 0$;

б) $\rho[0] = 0$;

в) для любого $x(p, t)$ вещественная функция $\rho[x(p, t)]$ от аргумента t непрерывна по t.

Процесс $x(p, t)$ называется равномерно устойчивым по мерам ρ_1 и ρ_2, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\rho_2[x(p, 0)] < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_1[x(p, t)] < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$ [8].

Взяв базисами фильтров

$$\mathfrak{E}_1 = \{E_{1,\varepsilon}\}, \text{ где } E_{1,\varepsilon} = \{x(p) : \rho_1[x(p)] < \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon < \infty,$$

$$\mathfrak{E}_2 = \{E_{2,\delta}\}, \text{ где } E_{2,\delta} = \{x(p) : \rho_2[x(p)] < \delta\}, \quad 0 < \delta < \infty,$$

а в качестве $\mathfrak{H} = \{H\}$ отображение

$$H = \left\{x(p, 0) \to L_{x(p,0)} : \frac{\partial x(p, t)}{\partial t} = F[x(p, t)]\right\},$$

удовлетворяющее краевым условиям, где $L_{x(p,0)}$ — множество функций $x(p)$ вида $x(p, t)$ при каждом фиксированном $0 < t < \infty$, получим определение устойчивости по двум мерам.

Следует отметить, что в примерах 1, 3 рассматривалась устойчивость, равномерная по времени. Если рассматривать устойчивость неравномерную, то для применения определения 3 следует перейти к расширенному множеству $M_1 = M \times [0, +\infty)$ и рассматривать базисы фильтров $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ в M_1.

Можно привести еще ряд определений устойчивости, которые при надлежащем выборе множества X и базисов фильтров $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{H}$ сводятся к определению 3.

2. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое частично упорядоченное множество с отношением порядка $(\leqslant)$. В [5, 6] дано определение функции Ляпунова $v: X \to [0, +\infty)$. В данной работе рассматривается функция $v: X \to (\mathfrak{L}, \leqslant)$, являющаяся в некотором мысле ее обобщением. С помощью этой функции получены условия $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивости без ограничений, приведенных в [5, 6].

Определение 4. Пусть $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X, $\mathfrak{H}$ — базис фильтра на F. Отображение $v: X \to (\mathfrak{L}, \leqslant)$ называется абстрактной функцией Ляпунова для четверки $(X, \mathfrak{H}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, если существуют подмножества I и J множества $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ такие, что множества $S_I = \{S_v^\alpha, \alpha \in I\}$ и $S_J = \{S_v^\alpha, \alpha \in J\}$, где $S_v^\alpha = \{x \in X: v(x) \leqslant \alpha\}$, являются базисами фильтров, и для них выполнены условия:

$$\mathfrak{E}_1 < S_I, \ S_J < \mathfrak{E}_2; \tag{2}$$

$$S_I < \mathfrak{H}(S_J). \tag{3}$$

Теорема 1. *Для того чтобы пара $(X, \mathfrak{H})$ была $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для $(X, \mathfrak{H}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ существовала абстрактная функция Ляпунова.*

Доказательство. Необходимость. В качестве $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ рассмотрим множество $G(X)$, упорядоченное по включению. Определим отображение $v: X \to G(X)$ следующим образом:

$$v(x) = \bigcap \{\alpha: x \in \alpha, \alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2\}. \tag{4}$$

Если нет таких $\alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2$, что $x \in \alpha$, то положим $v(x) = \sup G(X) = X$. Рассмотрим систему подмножеств:

$$S_v^\alpha = \{x \in X: v(x) \subseteq \alpha\}, \alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2.$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_2$ в силу определения $v(x)$ и S_v^α справедливо соотношение:

$$S_v^\alpha = \alpha. \tag{5}$$

Если положим $I = \mathfrak{E}_1$, $J = \mathfrak{E}_2$, то получим, что S_I и S_J — базисы фильтров, для которых выполнено (2). Используя $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивость пары $(X, \mathfrak{H})$, из (5) получим соотношение (3).

Достаточность следует из транзитивности $(<)$ и соотношений (2), (3),

Как видно из доказательства, при выводе необходимых условий теоремы в качестве $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ использовалось $G(X)$, упорядоченное по включению. Учитывая, что в приложениях множество $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ выбирается заранее, в частности $\mathfrak{L} = [0, +\infty)$, естественно возникает вопрос, при каких условиях из $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$-устойчивости пары $(X, \mathfrak{H})$ ледует существование абстрактной функции Ляпунова $V(x)$ для наперед заданного множества $(\mathfrak{L}, \leqslant)$.

Определение 5. Скажем, что квазифильтр $\widetilde{\mathfrak{E}} = \{\widetilde{E}_\alpha : \alpha \in N \subseteq \mathfrak{L}\}$ имеет тип $\mathfrak{L}$, если:

1) $\widetilde{E}_{\alpha_1} \subseteq \widetilde{E}_{\alpha_2}$ тогда и только тогда, если $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$;

2) для всякого непустого $\bigcap \{\widetilde{E}_\alpha : \alpha \in N_1 \subseteq N\}$ найдется $\alpha_0 \in N$, что $\widetilde{E}_{\alpha_0} = \bigcap \{\widetilde{E}_\alpha : \alpha \in N_1 \subseteq N\}$.

Как следует из [9, теорема 11.3.2], всякое частично упорядоченное множество $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ может быть погружено в полную структуру с сохранением граней, т. е. всякое непустое подмножество множества $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ имеет наибольший и наименьший элементы. Поэтому в дальнейшем для удобства будем считать, что $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ — фик ированная полная структура.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ — базисы фильтров на X, $\mathfrak{H}$ — базис фильтра на F и $(\mathfrak{L}, \leqslant)$ — заданное частично упорядоченное множество. Для существования абстрактной функции Ляпунова $V: X \to (\mathfrak{L}, \leqslant)$ необходимо и достаточно, чтобы на X существовал квазифильтр $\widetilde{\mathfrak{E}}$ типа $\mathfrak{L}$ и два базиса фильтра $\widetilde{\mathfrak{E}}_1 = \{\widetilde{E}_\alpha : \alpha \in N_1 \subseteq N\}$ и $\widetilde{\mathfrak{E}}_2 = \{\widetilde{E}_\alpha : \alpha \in N_2 \subseteq N\}$, причем $\widetilde{\mathfrak{E}}_1 \subseteq \widetilde{\mathfrak{E}}$, $\widetilde{\mathfrak{E}}_2 \subseteq \widetilde{\mathfrak{E}}$, такие, что:*

а) $\mathfrak{E}_1 < \widetilde{\mathfrak{E}}_1, \widetilde{\mathfrak{E}}_2 < \mathfrak{E}_2$;

б) *пара $(X, \mathfrak{H})$ являлась $(\widetilde{\mathfrak{E}}_1, \widetilde{\mathfrak{E}}_2)$-устойчивой.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем базисы фильтров S_I и S_J и образуем множество, состоящее из всевозможных непустых пересечений элементов S_v^α из S_I и S_J. Каждому $\widetilde{E} = \bigcap \{S_v^\alpha : \alpha \in N \subseteq I \cup J\}$ поставим в соответствие индекс $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \widetilde{N}\}$, где $\widetilde{N}$ — множество индексов всех S_v^α таких, что $\widetilde{E} \subseteq S_v^\alpha$. Тогда семейство $\widetilde{\mathfrak{E}} = \{\widetilde{E}_{\alpha_0}\}$ — квазифильтр типа $\mathfrak{L}$. Если положить $\widetilde{\mathfrak{E}}_1 = S_I, \widetilde{\mathfrak{E}}_2 = S_J$, то условия а) и б) теоремы 2 будут следовать из соотношений (2), (3).

Достаточность. Как следует из теоремы 1, для $(X, \mathfrak{H}, \widetilde{\mathfrak{E}}_1, \widetilde{\mathfrak{E}}_2)$ существует функция Ляпунова

$$v(x) = \bigcap \{\widetilde{E}_\alpha : x \in \widetilde{E}_\alpha, \alpha \in N_1 \cup N_2 \subseteq \mathfrak{L}\}.$$

Поскольку $\widetilde{\mathfrak{E}}$ имеет тип $\mathfrak{L}$, то $v: x \to \widetilde{E}_{\alpha_0}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{L}$. Определим отображение $V: X \to (\mathfrak{L}, \leqslant)$ следующим образом:

$$V(x) = \gamma(v(x)) = \gamma(\widetilde{E}_{\alpha_0} = \alpha_0.$$

Отсюда $S_v^\alpha = \widetilde{E}_\alpha$, $\alpha \in N_1 \cup N_2$. Если положить $I = N_1$, $J = N_2$, то из условий а) и б) получим соотношения (1), (2).

3. В работах [5, 6] вместо базисов фильтров, фигурирующих выше, рассматривались квазифильтры, при этом множество $\mathfrak{H}$ состояло из одного элемента. Мы ограничились базисами фильтров, поскольку значительная часть определений устойчивости укладывается в определение 3, использующее понятие только базисов фильтров. Вместе с тем существуют определения устойчивости, которые не укладываются в это определение.

Если в приведенных теоремах понятия базисов фильтров заменить квазифильтрами, то, как нетрудно видеть, можно получить результаты, обобщающие теоремы 1, 2.

В заключение выражаем искренную благодарность А. Н. Шарковскому за помощь и полезные советы, оказанные при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bushaw, A Stability Criterion for General Systems, Mathematical Systems Theory, 1, № 1, 1967.
2. P. Habets, K. Peiffer, Classification of Stability-like Concept and Their Studi Using Lyapunov Function, Jorn. Math. Anal. and Appl., 43, № 2, 1973.
3. В. И. Зубов, Методы А. М Ляпунова и их применения, Изд-во ЛГУ, Л., 1957.
4. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, Метод сравнения в анализе процессов, Вторая четаевская конференция по аналитической механике, устойчивости движения и оптимальному управлению (аннотации докладов), Казань, 1972.
5. P. Seibert, A. Unified Theory of Liapunov Stabivlity, Funkcialaj Ekvacioj, 15, N 3, 1972.

6. P. M. Salzberg, P. Seibert, A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Liapunov Funktion, Funkciala; Ekvacioj, **16**, N 2, 1973.
7. Н. Бурбаки, Общая топология, Основные структуры, «Наука», М., 1968.
8. А. В. Мовчан, О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем, ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
9. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию 28. V. 1974 г.