УДК 517.5

В. В. Бардзинский

О полиномиально-аппроксимационных свойствах функций и их производных на комплексных множествах

Данная статья непосредственно примыкает к работе П. М. Тамразова [1], в которой (см. также [2, 3]) были установлены телесные обратные теоремы полиномиального приближения функций на произвольном ограниченном континууме и даже на регулярном компакте K. Ниже используем обозначения и понятия из работы [1] без каких-либо оговорок (часть из них была введена в работе [4], посвященной контурным обратным теоремам).

В результатах работы [1] содержится, в частности, следующее утверждение.

Пусть $f_K(\zeta)$ — функция, равномерно приближаемая на K последовательностью полиномов $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta), \ldots$ со скоростью, задаваемой на границе ∂K соотношением

$$|f(z) - P_n(z)| = O\left\{\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]^r \omega\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]\right\} \; (n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K), \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $r \geqslant 0$ — фиксированные константы, $\omega(x)$ — фиксированный нормальный модуль непрерывности, а $P_n(z)$ — полином степени не выше n. Тогда при определенных натуральных ν (см. [1]) функция $f_K(\zeta)$ имеет на K непрерывную ν-ю телесную производную, равномерно приближаемую на K полиномами $P_n^{(\nu)}(\zeta)$ со скоростью, которая в случае, когда K — континуум, определяется следующим соотношением при $z \in \partial K$:

$$|f_K^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| = O\left[\int\limits_0^{d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} t^{r-\nu-1}\omega(t)\,dt\right] \quad (n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K), \tag{2}$$

а при $z \in \partial K$ и $\zeta \in K_{z,\zeta} \overset{\mathrm{df}}{=} K \cap \left\{\zeta : |\zeta - z| \leqslant e^3 d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right\}$

$$|f_K^{(\nu)}(\zeta) - P_n^{(\nu)}(\zeta)| = O\left[\int\limits_0^{2d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} t^{r-\nu-1}\omega(t)\,dt\right] \tag{3}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K,\ \zeta \in K_{z,\zeta}).$$

В общем случае, когда K не является континуумом, оценки (2) и (3) усложняются за счет появления под интегралами множителя $\hat{\mathfrak{F}}_{x^r\omega(x)}(z, t)$, определяемого через модуль гармонизации $\mathfrak{F}_{x^r\omega(x)}(z, t)$, или множителя $\hat{T}(z, t)$ (см. [1, с. 150]).

Целью данной работы является исследование случая, когда скорость приближения задается на ∂K не соотношением (1), а условием

$$|f_K(z) - P_n(z)| = o\left\{\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]^r \omega\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]\right\} \tag{4}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K).$$

Покажем, что при указанном более сильном условии некоторые утверждения из [1] могут быть усилены в смысле замены в них мажорации типа $O(\cdot)$ мажорацией типа $o(\cdot)$. Сначала сформулируем результаты для континуума.

Теорема 1. *Пусть на ограниченном континууме K задана функция $f_K(\zeta)$, равномерно приближаемая на K последовательностью полиномов $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta), \ldots$, причем скорость приближения определяется на ∂K условием* (4). *Тогда функция $f_K(\zeta)$ регулярна во внутренности K, непрерывна на K и, если ν принимает натуральные значения, для которых*

$$\int\limits_0^1 t^{r-\nu-1}\omega(t)\,dt < +\infty, \tag{5}$$

то для каждого такого ν функция $f_K(\zeta)$ имеет на K непрерывную ν-ю телесную производную, равномерно приближаемую на K полиномами $P_n^{(\nu)}(\zeta)$ со следующей скоростью:

$$|f_K^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| = o\left\{\int\limits_0^{d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} t^{r-\nu-1}\omega(t)\,dt\right\} \tag{6}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K),$$

а при $z \in \partial K$ и $\zeta \in K_{z,\zeta}$

$$|f_K^{(\nu)}(\zeta) - P_n^{(\nu)}(\zeta)| = o\left\{\int\limits_0^{2d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} t^{r-\nu-1}\omega(t)\,dt\right\} \tag{7}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K,\ \zeta \in K_{z,\zeta}).$$

Докажем утверждение, являющееся более общим, чем утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть на регулярном компакте K задана функция $f_K(\zeta)$, равномерно приближаемая на K последовательностью полиномов $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta), \ldots$, причем скорость приближения определяется на ∂K соотношениями*

$$|f_K(z) - P_n(z)| = o\left\{\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]^r \omega\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]\right\} \tag{8}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K).$$

Тогда функция $f_K(\zeta)$ регулярна во внутренности K, непрерывна на K и если ν принимает натуральные значения, для которых интеграл

$$\int_0^1 t^{r-\nu-1}\omega(t)\,\hat{\mathfrak{F}}_{x^r\omega(x)}(z, t)\,dt \tag{9}$$

сходится равномерно относительно $z \in \partial K$, то для каждого такого ν функция $f_K(\zeta)$ имеет на K непрерывную ν-ю телесную производную, равномерно приближаемую на K полиномами $P_n^{(\nu)}(\zeta)$ со следующей скоростью: при $z \in \partial K$

$$|f_K^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| = o\left\{\int_0^{d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} t^{r-\nu-1}\,\omega(t)\,\hat{\mathfrak{F}}_{x^r\omega(x)}(z, t)\,dt\right\} \tag{10}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K),$$

а при $z \in \partial K$ и $\zeta \in K_{z,\zeta}$

$$|f_K^{(\nu)}(\zeta) - P_n^{(\nu)}(\zeta)| = o\left\{\sup_{w:\, w \in \partial K,\ |w - z| \leqslant d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} \int_0^{2d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} t^{r-\nu-1}\,\omega(t)\,\hat{\mathfrak{F}}_{x^r\omega(x)}(w, t)\,dt\right\} \tag{11}$$

$$(n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K,\ \zeta \in K_{z,\zeta}).$$

Доказательство. В работе [1] доказано, что в этих (и даже более общих) условиях существует непрерывная на K телесная производная $f_K^{(\nu)}(\zeta)$, представимая в виде равномерно сходящегося на K ряда

$$f_K^{(\nu)}(\zeta) = P_n^{(\nu)}(\zeta) + \sum_{k=n}^{\infty} P_{k,k+1}^{(\nu)}(\zeta). \tag{12}$$

Непосредственно из определения модуля гармонизации видно, что

$$\mathfrak{F}_{\theta(x)}(z, t) \equiv \mathfrak{F}_{a\theta(x)}(z, t), \tag{13}$$

каковы бы ни были нормальный модуль непрерывности $\theta(x)$ и константа $a > 0$ (ср. с аналогичным замечанием работы [4, с. 1375]).

Из соотношения (8) вытекает, что существует последовательность $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что

$$|f_K(z) - P_n(z)| \leqslant \alpha_n\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right]^r \omega\left[d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots,\ z \in \partial K). \tag{14}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

Фиксируем точку $z_0 \in \partial K$ и строим для нее опорную подпоследовательность $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$. Так как для произвольных p и $q > p$

$$|P_{p,q}(z)| = |P_q(z) - P_p(z)| \leqslant 2\alpha_p \omega\left[d\left(\frac{\lambda}{p}, z\right)\right]\left[d\left(\frac{\lambda}{p}, z\right)\right]^r,$$

то, применив теорему 1 из работы [4] и учитывая (13), будем иметь

$$|P_{p,q}^{(\nu)}(z_0)| \leqslant 2\nu!\ \alpha_p \omega\left[d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)\right]\left[d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)\right]^r \times$$

$$\times \mathfrak{F}_{x^r\omega(x)}\left(\left(z_0,\ d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)\right)\right)\frac{e^{\lambda h}}{\left[d\left(\frac{\lambda h}{q}, z_0\right)\right]^{\nu}}. \tag{15}$$

Точно так же, как в [4], при $m_j \leqslant p < q < m_{j+1}$ получаем

$$|P_{p,q}^{(\nu)}(z_0)| \leqslant 2\nu!\ \alpha_p e^{\lambda} K(\nu-1) \max\{e^{2\nu}, e^{\lambda}\} \int\limits_{e^{-1}d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)}^{d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)} J_{\nu-1}(z_0, t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\nu!\ \alpha_p e^{\lambda} K(\nu-1) \max\{e^{2\nu}, e^{\lambda}\} \int\limits_{d_{j+3}}^{d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)} J_{\nu-1}(z_0, t)\,dt, \tag{16}$$

$$|P_{m_j,q}^{(\nu)}(z_0)| \leqslant 2\nu!\ \alpha_{m_j} e^{\lambda} K(\nu-1)\,[\max\{e^{2\nu}, e^{\lambda}\} \times$$

$$\times \int\limits_{d_{j+1}}^{d_j} J_{\nu-1}(z_0, t)\,dt + e^{2\nu}\int\limits_{d_{j+2}}^{d_{j+1}} J_{\nu-1}(z_0, t)\,dt, \tag{17}$$

где

$$J_{\nu-1}(z_0, t) = t^{r-\nu-1}\,\omega(t)\,\hat{\mathfrak{F}}_{x^r\omega(x)}(z_0, t).$$

Повторяя те же выкладки что и в работе [4], но используя монотонность α_n по n и оценки (15) — (17), для произвольных P и $Q \geqslant P$ получим

$$\left|\sum_{n=P}^{Q} P_{n,n+1}^{(\nu)}(z_0) \leqslant 2\nu!\ \alpha_p K(\nu-1)\, c_\nu \int\limits_0^{d\left(\frac{\lambda}{p}, z_0\right)} J_{\nu-1}(z_0, t)\,dt. \tag{18}\right.$$

Из (12) и (18) следует

$$|f_K^{(\nu)}(z) - P_n^{(\nu)}(z)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} P_{k,k+1}^{(\nu)}(z)\right| \leqslant c_\nu \alpha_n \times$$

$$\times \int\limits_0^{d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} J_{\nu-1}(z, t)\,dt = o\left[\int\limits_0^{d\left(\frac{\lambda}{n}, z\right)} J_{\nu-1}(z, t)\,dt\right] \quad (n \to \infty \text{ равномерно по } z \in \partial K).$$

Прежде чем доказывать (11), убедимся в справедливости утверждения, сформулированного в виде леммы.

Лемма. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда при любых* $\zeta_0 \in K$, $z_0 \in \partial K$ *и* $M \geqslant m$ *имеет место оценка*

$$\sum_{n=M}^{\infty} P_{n,n+1}^{(\nu)}(\zeta_0)| = o\left[\sup_{w:w\in\partial K,\ |w-z_0|\leqslant\Delta(M)} \int_0^{2\Delta(M)} J_{\nu-1}(w, t)\,dt\right] \quad (M\to\infty,\ \zeta_0\in K), \tag{19}$$

где

$$\Delta(M) = \max\left\{|\zeta_0 - z_0|\,e^3,\ d\left(\frac{\lambda}{M}, z_0\right)\right\}. \tag{20}$$

Доказательство. Для точек $z\in\partial K$ из оценки (18) следует оценка

$$\left|\sum_{n=M}^{\infty} P_{n,n+1}^{(\nu)}(z)\right| \leqslant 2\nu!\,\alpha_M K(\nu-1)\,c_\nu \int_0^{d\left(\frac{\lambda}{M}, z\right)} J_{\nu-1}(z, t)\,dt, \tag{21}$$

где $\alpha_M \downarrow 0$ при $M\to\infty$. Пользуясь рассуждениями работы [1, с. 157, 158], приходим к соотношению

$$\left|\sum_{n=M}^{\infty} P_{n,n+1}^{(\nu)}(z)\right| \leqslant 2\nu!\,\alpha_M K(\nu-1)\,c_\nu \int_0^{(e^{-3}+1)\Delta(M)} J_{\nu-1}(z, t)\,dt \tag{22}$$

при $|z-z_0|\leqslant e^{-3}\Delta(M)$. Отсюда видно, что для точек $\zeta_0\in\partial K$ лемма справедлива.

Теперь предположим, что множество $K\setminus\partial K$ не пусто и что $\zeta_0\in B_j$ при каком-нибудь конкретном $j\geqslant 1$. Если $B_j\subset\{\zeta:|\zeta-z_0|<\Delta(M)\}$, то

$$\max_{z\in\partial B_j} d\left(\frac{\lambda}{M}, z\right)\leqslant 2\Delta(M) \tag{23}$$

и, кроме того, существует $w\in\partial B_j$ такое, что

$$2\int_0^{d\left(\frac{\lambda}{M}, w\right)} J_{\nu-1}(w, t)\,dt \geqslant \sup_{z\in\partial B_j}\int_0^{d\left(\frac{\lambda}{M}, z\right)} J_{\nu-1}(z, t)\,dt. \tag{24}$$

Из (21), (23) и (24) имеем

$$\left|\sum_{n=M}^{\infty} P_{n,n+1}^{(\nu)}(\zeta_0)\right| \leqslant 2\nu!\,\alpha_M K(\nu-1)\,c_\nu \sup_{z\in\partial B_j}\int_0^{d\left(\frac{\lambda}{M}, z\right)} J_{\nu-1}(z, t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\nu!\,\alpha_M K(\nu-1)\,c_\nu \int_0^{d\left(\frac{\lambda}{M}, w\right)} J_{\nu-1}(w, t)\,dt \leqslant 4\nu!\,\alpha_M K(\nu-1)\int_0^{2\Delta M} J_{\nu-1}(w, t)\,dt, \tag{25}$$

откуда получается утверждение леммы. Если же $B_j\not\subset\{\zeta:|\zeta-z_0|<\Delta(M)$, то, пользуясь неравенством (21) и используя соображения, изложенные в работе [1, с. 158, 159], получаем

$$\left|\sum_{n=M}^{\infty} P_{n,n+1}^{(\nu)}(\zeta_0)\right| \leqslant 2\nu!\,90^{r-\nu}\,\psi(90)\,c_\nu K(\nu-1)\,\alpha_M \int_0^{\Delta(M)} t^{r-\nu-1}\,\omega(t)\,dt. \tag{26}$$

Из (25) и (26) видно, что в любом случае для $\zeta_0 \in B_j$ утверждение леммы верно.

Теперь оценка (11) получается из формулы (12) с применением леммы. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность П. М. Тамразову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. М. Тамразов, Телесная обратная задача полиномиального приближения функций на регулярном компакте, Изв. АН СССР, сер. мат., 1973, т. 37, № 1.
2. П. М. Тамразов, Граничные и телесные обратные задачи полиномиальной аппроксимации функций для компактов на плоскости, Congres International des Mathematiciens, Nice, 1970, «265 communications individuelles», 176—177.
3. П. М. Тамразов, Телесные обратные теоремы полиномиальной аппроксимации для регулярных компактов комплексной плоскости, ДАН СССР, 1971, т. 198, № 3.
4. Н. А. Лебедев, П. М. Тамразов, Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости, Изв. АН СССР, сер. мат., 1970, т. 34, № 6.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 4.IX 1975 г.