УДК 517.52

Д. И. Боднар, И. Я. Олексив

О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами

Ветвящиеся цепные дроби, являющиеся естественным обобщением обыкновенных цепных дробей, впервые введены в работе [1]. В работах [1—3] исследовались вопросы сходимости ветвящихся дробей.

В данной статье устанавливается признак сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.

Напомним некоторые определения. Выражение

$$\cfrac{a}{b+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i_1}}{b_{i_1}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i_1i_2}}{b_{i_1i_2}+\vdots}}}$$

или, используя другие более компактные, но менее наглядные обозначения,

$$\frac{a|}{|b}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i_1}|}{|b_{i_1}}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{a_{i_1i_2}|}{b_{i_1i_2}|}+\ldots, \tag{1}$$

где $a_{i_1i_2\ldots i_k}$, $b_{i_1i_2\ldots i_k}$, a, $b\,(1\leqslant i_k\leqslant N;\ k=1,2,\ldots)$ — действительные числа, называется бесконечной ветвящейся цепной дробью с N ветками ветвлений.

Конечные ветвящиеся дроби

$$\frac{a|}{|b}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i_1}|}{|b_{i_1}}+\ldots+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i_1i_2\ldots i_k}|}{|b_{i_1i_2\ldots i_k}}=\frac{P_k}{Q_k} \tag{2}$$

$(k=0,1,2,\ldots)$ называются подходящими дробями для (1) k-го порядка.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{P_k}{Q_k}$, то дробь (1) называется сходящейся.

Если дробь (1) имеет неотрицательные члены, то для $\dfrac{P_k}{Q_k}$ выполняется свойство "вилки":

а) $\dfrac{P_0}{Q_0}\leqslant\dfrac{P_2}{Q_2}\leqslant\ldots\leqslant\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}\leqslant\ldots,\quad \dfrac{P_1}{Q_1}\geqslant\dfrac{P_3}{Q_3}\geqslant\ldots\geqslant\dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\geqslant\ldots;$

б) для произвольных i и j $\dfrac{P_{2i}}{Q_{2i}}\leqslant\dfrac{P_{2j+1}}{Q_{2j+1}}$.

Отсюда необходимым и достаточным условием сходимости дроби (1) с неотрицательными членами является стремление к нулю разности $\left(\dfrac{P_{2i_k-1}}{Q_{2i_k-1}}-\dfrac{P_{2j_k}}{Q_{2j_k}}\right)$ хотя бы для одной пары бесконечных последовательностей $\{i_k\}$, $\{j_k\}$.

Впредь будем рассматривать ветвящиеся цепные дроби вида

$$\frac{1|}{|b}+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{1|}{|b_{i_1}}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{1|}{|b_{i_1i_2}}+\ldots,\tag{3}$$

где $b>0$, $b_{i_1i_2\ldots i_k}\geqslant 0\ (1\leqslant i_k\leqslant \mathrm{N};\ k=1,2,\ldots)$. Дробь (1) всегда может быть приведена к виду (3), если $b_{i_1i_2\cdots i_k}\geqslant 0$, $a_{i_1i_2\ldots i_k}>0$.

Введем следующие обозначения:

$$b_{i_1i_2\ldots i_k}+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{1|}{|b_{i_1i_2\ldots i_{k+1}}}+\ldots+\sum_{i_p=1}^{N}\frac{1|}{|b_{i_1i_2\ldots i_p}}=Q^{(p+1)}_{i_1i_2\ldots i_k}.\tag{4}$$

В частности, p-я подходящая дробь и общий член дроби (3) запишутся соответственно в виде $P_p/Q_p=1/Q^{(p)}$, $b_{i_1i_2\ldots i_k}=Q^{(k+1)}_{i_1i_2\ldots i_k}$.

В предположении, что $b_{i_1i_2\cdots i_m}>0$, $b_{i_1i_2\cdots i_{m+1}}>0$, найдем формулу разности $1/Q^{(m)}-1/Q^{(m+1)}$, используя обозначения (4).

Для $m=1$ получаем

$$\frac{1}{Q^{(1)}}-\frac{1}{Q^{(2)}}=\frac{1/b_1+\ldots+1/b_N}{Q^{(1)}Q^{(2)}}=\sum_{i_1=1}^{N}\frac{1}{Q^{(1)}Q^{(2)}Q^{(2)}_{i_1}}.$$

Методом полной математической индукции легко устанавливается:

$$\frac{1}{Q^{(m)}}-\frac{1}{Q^{(m+1)}}=(-1)^{m+1}\sum_{i_1i_2\ldots i_m}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{m-1}Q^{(m)}_{i_1i_2\ldots i_k}\prod\limits_{k=0}^{m}Q^{(m+1)}_{i_1i_2\ldots i_{k+1}}},\tag{5}$$

где $Q^{(m)}_{i_0}=Q^{(m)}$, $Q^{(m+1)}_{i_0}=Q^{(m+1)}$ и суммирование ведется по всем индексам $i_1, i_2, \ldots, i_m$, каждый из которых независимо пробегает значения от 1 до N. В условиях, при которых получена формула (5), $Q^{(m)}_{i_1i_2\ldots i_k}$, $Q^{(m+1)}_{i_1i_2\ldots i_k}$ не обращаются в нуль ни при каких индексах $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Теорема. *Ветвящаяся цепная дробь* (3) *с неотрицательными членами сходится, если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k} \min_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} b_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} = \infty,$$

где $\min\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — *минимальный член дроби* (3) *на* $(k+1)$*-м этаже.*

Доказательство. Обозначим

$$\min_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k} \min_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} b_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} = \delta_{k+1}.$$

Случай 1. Все члены дроби (3) положительны.

Упомянутое свойство «вилки» для дробей с неотрицательными членами позволяет свести доказательство сходимости дроби к доказательству того, что $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{1}{Q^{(2p-1)}} - \frac{1}{Q^{(2p)}}\right) = 0.$

Используя (5) и (4), получим

$$\frac{1}{Q^{(2p-1)}} - \frac{1}{Q^{(2p)}} =$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1}} \frac{1}{Q^{(2p-1)} \prod\limits_{k=0}^{p-2} \left(Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+1}} Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+2}}\right) \prod\limits_{k=0}^{p-1} \left(Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k}} Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k+1}}\right)} =$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1}} \left[\frac{1}{Q^{(2p-1)} \prod\limits_{k=0}^{p-2} \left(b_{i_1 \ldots i_{2k+1}} Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+2}} + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+1} i_{2k+2}}}{Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+1} j}} \right)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{p-1} \left(b_{i_1 \ldots i_{2k}} Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k+1}} + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k} i_{2k+1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k} j}} \right)} \right].$$

Введя обозначения

$$Q^{(2p-1)} \prod_{k=0}^{p-2} \left[\left(b_{i_1 \ldots i_{2k+1}} Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+2}} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+1} i_{2k+2}}}{Q^{(2p-1)}_{i_1 \ldots i_{2k+1} j}} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(b_{i_1 \ldots i_{2k}} Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k+1}} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k} i_{2k+1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k} j}} \right) \right] = M_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-2}},$$

запишем:

$$\frac{1}{Q^{(2p-1)}} - \frac{1}{Q^{(2p)}} =$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1}} \frac{1}{M_{i_1 \ldots i_{2p-2}} \left(b_{i_1 \ldots i_{2p-2}} Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-1}} + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} i_{2p-1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} j}} \right)} =$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-2}} \frac{1}{M_{i_1 \ldots i_{2p-2}}} \left(\sum_{i_{2p-1}=1}^{N} \frac{1}{b_{i_1 \ldots i_{2p-2}} Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-1}} + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} i_{2p-1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-1} j}}} \right).$$

Отсюда, используя очевидное неравенство

$$b_{i_1 \ldots i_{2p-2}} Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-1}} \geqslant \delta_{2p-1},$$

получаем:

$$\frac{1}{Q^{(2p-1)}} - \frac{1}{Q^{(2p)}} \leqslant \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-2}} \frac{1}{M_{i_1 \ldots i_{2p-2}}} \left(\sum_{i_{2p-1}=1}^{N} \frac{1}{\delta_{2p-1} + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} i_{2p-1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} j}}} \right). \tag{6}$$

Отношение $\frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} i_{2p-1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} j}}$ оценить сложно и поэтому будем рассматривать их как независимые переменные. Оценка сверху выражения

$$\sum_{i_{2p-1}=1}^{N} \frac{1}{\delta_{2p-1} + \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} i_{2p-1}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2p-2} j}}}$$

производится на основании следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j}} \leqslant 1 - \frac{\delta}{n + \delta}, \tag{7}$$

справедливого для произвольных $x_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$ и $\delta > 0$.

Доказательство неравенства (7) можно получить, если стандартными методами дифференциального исчисления искать $\max \sum\limits_{i=1}^{n} (\delta + Ax_i)^{-1}$ при условии $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{-1} = A$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^{n} (\delta + Ax_i)^{-1} + \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j^{-1} \right] = -A(\delta + Ax_k)^{-2} - \lambda x_k^{-2}.$$

Отсюда $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{n}{A}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\delta + \frac{n}{A} A \right)^{-1} = n(\delta + n)^{-1}$.

Применяя (7) к неравенству (6), запишем:

$$\frac{1}{Q^{(2p-1)}} - \frac{1}{Q^{(2p)}} \leqslant \left(1 - \frac{\delta_{2p-1}}{N + \delta_{2p-1}} \right) \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-2}} \frac{1}{M_{i_1 \ldots i_{2p-2}}} =$$

$$=\left(1-\frac{\delta_{2p-1}}{N+\delta_{2p-1}}\right)\sum_{i_1 i_2 \dots i_{2p-3}}\frac{1}{M_{i_1\dots i_{2p-3}}}\times$$

$$\times\sum_{i_{2p-2}=1}^{N}\frac{1}{b_{i_1\dots i_{2p-3}}Q^{(2p-1)}_{i_1\dots i_{2p-2}}+\sum\limits_{l=1}^{N}\frac{Q^{(2p-1)}_{i_1\dots i_{2p-3}i_{2p-2}}}{Q^{(2p-1)}_{i_1\dots i_{2p-3}l}}}.$$

Отсюда ясно, что, применяя последовательно неравенство (7), можно получить:

$$\frac{1}{Q^{(2p-1)}}-\frac{1}{Q^{(2p)}}\leqslant\frac{1}{Q^{(2p-1)}}\prod_{k=1}^{2p-1}\left(1-\frac{\delta_k}{N+\delta_k}\right). \tag{8}$$

Но расходимость ряда $\Sigma\delta_k$ влечет за собой равенства

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\delta_k}{N+\delta_k}\right)=0 \text{ и } \lim_{p\to\infty}\left(\frac{P_{2p-1}}{Q_{2p-1}}-\frac{P_{2p}}{Q_{2p}}\right)=0.$$

Случай 2. Некоторые из членов дроби (3) обращаются в нуль.

Выберем такую подпоследовательность $\{\delta_{k_j}\}$, что $\delta_{k_j}\neq 0$ (это возможно в силу условий теоремы). Для разности $\dfrac{1}{Q^{(m_j)}}-\dfrac{1}{Q^{(m_j+1)}}$ сохраняется формула (5) и неравенство (6) (с соответствующим изменением индексов), где некоторые δ_i могут обращаться в нуль.

Последовательно применяя выражение (7), приходим к неравенству

$$\left|\frac{1}{Q^{(m_j)}}-\frac{1}{Q^{(m_j+1)}}\right|\leqslant\frac{1}{K}\prod_{i=1}^{j}\left(1-\frac{\delta_{m_i}}{N+\delta_{m_i}}\right),$$

где K — абсолютная постоянная, и по аналогии со случаем 1 завершаем доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Скоробогатько, Н. С. Дронюк, О. І. Бобик, Б. Й. Пташник, Гіллясті ланцюгові дроби, ДАН УРСР, сер. А, 1967, № 2.
2. В. Я. Скоробогатько, Ознака збіжності гіллястого ланцюгового дробу, ДАН УРСР, сер. А, 1972, № 1.
3. І. П. Пустомельников, Представлення розв'язку диференціального рівняння n-го порядку гіллястим дробом, в кн.: Вісник Львівського політехнічного інституту, № 44, Деякі питання теорії алгебри і диференціальних рівнянь, Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1970.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редакцию 23.XI 1973 г.,
после переработки — 19.I 1976 г.