УДК 519.21

Г. П. Буцан

Несколько замечаний к работе «О представлении мультипликативных процессов»

В данной работе все обозначения будут соответствовать [1], где было получено представление Леви для M процесса $\xi(t)(\omega)$. Цель данной заметки получить аналогичное представление для стохастической полугруппы $X_s^t(\omega)$ со значениями в $G_2(H)$. Попутно будет получено новое, более простое представление для непрерывной составляющей $X_s^t(0, \infty)$ стохастической полугруппы X_s^t.

Напомним определение (правой) стохастической полугруппы, введенное в [2]:

двупараметрическое, сепарабельное по обоим аргументам, семейство случайных величин $X_s^t(\omega)$, $0 \leqslant s < t < \infty$, со значениями в $G_2(H)$ называется стохастической полугруппой, если оно удовлетворяет условиям:

1) $\forall 0 \leqslant s < \tau < t < \infty$ $X_\tau^t X_s^\tau = X_s^t$, $X_s^s = E$ (mod P);

2) $X_{t-\delta}^{t+\varepsilon} \xrightarrow{P} E$, $\delta, \varepsilon \to 0$;

3) распределение $X_t^{t+\Delta t}$ зависит только от Δt;

4) пусть F_s^t — σ-алгебра, порожденная X_δ^τ, $0 \leqslant s \leqslant \delta < \tau \leqslant t \leqslant \infty$, тогда F_t^∞, F_s^t, F_0^s независимы.

Используя результаты [3, 4], можно показать, что $\forall \omega \overline{\in} N$, $P\{N\} = 0$, $\forall \tau \in [0, \infty)\ \exists \lim\limits_{\varepsilon,\delta \to 0} X_{\tau-\delta}^{\tau+\varepsilon} = X_{\tau-0}^{\tau+0}$. Этот предел назовем скачком стохастической полугруппы X_s^t в точке τ. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 \leqslant \infty$, тогда $\forall \omega \overline{\in} N$ у X_s^t будет только конечное число точек τ таких, что $\varepsilon_1 \leqslant |X_{\tau-0}^{\tau+0} - E| < \varepsilon_0$, так как X_s^t имеет (mod P) только конечное число ε колебаний.

Доказательство этих фактов отличается от доказательства соответствующих фактов в [3 — 5] только технически и поэтому опускается.

Пусть, далее, τ_s^1 — первый после s момент времени, для которого $|X_{\tau_s^1-0}^{\tau_s^1+0} - E| \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$, τ_s^2 — первый после τ_s^1 момент, для которого $|X_{\tau_s^2-0}^{\tau_s^2+0} - E| \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$, и т. д. Рассмотрим стохастические полугруппы:

$$X_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{\tau_s^k \leqslant t < \tau_s^{k+1}\} X^t_{\tau_s^k+0} X_{\tau_s^{k-1}+0}^{\tau_s^k-0} \ldots X_{\tau_s^1+0}^{\tau_s^2-0} X_s^{\tau_s^1-0},$$

$$Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\{\tau_s^k \leqslant t < \tau_s^{k+1}\} X_{\tau_s^k-0}^{\tau_s^k+0} \ldots X_{\tau_s^1-0}^{\tau_s^1+0},$$

$$\tau_s^0 = s, \quad X_s^{s+0} = E.$$

Легко видеть, что $Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ представляет собой произведение скачков стохастической полугруппы X_s^t, «попавших до момента t во множество $[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$», $X_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ указанных скачков не имеет (mod P). Справедлива следующая теорема.

Теорема. $X_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ *и* $Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ *независимые стохастические полугруппы.*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства соответствующего факта в [3—5] только технически и поэтому также опускается.

Далее, если $\varepsilon_0 = \infty$, а $\varepsilon_1 = \varepsilon < 1$, то $X_s^t[\varepsilon, \infty)$ будет принимать значения в $G_2(H)$ и для достаточно малого ε у $X_s^t[\varepsilon, \infty)$ и $X_s^{t^{-1}}[\varepsilon, \infty)$ будут существовать непрерывные моменты всех порядков (см. [1, замечание 2]), а значит и второго порядка, т. е. $\| X_s^t[\varepsilon, \infty) - E \| = \sqrt{M\,\mathrm{Sp}\,(X_s^t - E)^*(X_s^t - E)} < \infty$. Фиксируем это: $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1$.

Для двух стохастических полугрупп X_t^s и Y_s^t определим $X_s^t \boxtimes Y_s^t$ как $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{2^n} X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}$ по вероятности, где $\{t_k^n\}$ — двоично рациональное разбиение отрезка $[s, t]$, а произведение Π берется в порядке убывания индекса t_k^n слева направо. Легко видеть, что

$$X_s^t = X_s^t[\varepsilon, \infty) \boxtimes Z_s^t[\varepsilon, \infty) \pmod P.$$

Пусть

$$r_s^t(\varepsilon) = MX_s^t[\varepsilon, \infty),\ m_s^t[\varepsilon, \varepsilon_0) = MZ_s^t[\varepsilon, \varepsilon_0),\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

как и выше, у $Z_s^t[\varepsilon, \varepsilon_0)$ существуют моменты всех порядков. Определим $\hat{X}_s^t[\varepsilon, \infty) = r_s^{t^{-1}}(\varepsilon) \boxtimes X_s^t[\varepsilon, \infty)$. Наша цель теперь показать, что при $\varepsilon \to 0$ $\hat{X}_s^t[\varepsilon, \infty) \to X_s^t(0, \infty)$, где $X_s^t(0, \infty)$ — непрерывная $(\mathrm{mod}\, P)$ по обоим аргументам стохастическая полугруппа. Для этого $\forall \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ рассмотрим стохастическую полугруппу

$$\tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes (Z_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes \hat{X}_s^t[\varepsilon_0, \infty)).$$

Так же, как это проделано в [1], можно показать, что $\tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty)$ — мартингал по $\varepsilon_1 \uparrow$ при фиксированных t и s, мартингал по $t \uparrow$ при фиксированных s и ε_1, мартингал по $s \downarrow$ при фиксированных t и ε_1. Поэтому $\tilde{X}_s^t[\varepsilon_n, \infty) \rightrightarrows$ $\rightrightarrows X_s^t(0, \infty)$ равномерно по t и s $(\mathrm{mod}\, P)$ для некоторой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$. Здесь $X_s^t(0, \infty)$ непрерывна $(\mathrm{mod}\, P)$ по t и s, потому что у $\tilde{X}_s^t[\varepsilon_n, \infty)$ нет скачков, «превосходящих по норме ε_n». Покажем, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ $\tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = \hat{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty)$ $(\mathrm{mod}\, P)$ и стало быть

$$\hat{X}_s^t[\varepsilon_n, \infty) \rightrightarrows X_s^t(0, \infty),\ 0 \downarrow \varepsilon_n < \varepsilon_0.$$

Действительно, так как

$$\tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes (Z_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes (r_s^{t^{-1}}(\varepsilon_0) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_0, \infty))), \tag{1}$$

то по теореме 1 [1] имеем

$$m_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes \tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = Z_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes (r_s^{t^{-1}}(\varepsilon_0) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_0, \infty)) \pmod P.$$

Теперь, учитывая, что $Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ имеет конечное число скачков и кусочно-постоянна, получаем:

$$Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes (m_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes \tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty)) = r_s^{t^{-1}}(\varepsilon_0) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_0, \infty) \pmod P.$$

И далее по теореме 1 [1]

$$r_s^t(\varepsilon_0) \boxtimes (Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes (m_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes \tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty))) = X_s^t[\varepsilon_0, \infty) \pmod P.$$

В левой части этого равенства все сомножители независимы и поэтому по теореме 2 [2] имеем

$$Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^t(\varepsilon_0) \boxtimes m_s^{t^{-1}}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes \tilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = X_s[\varepsilon_0, \infty) \pmod P,$$

откуда, как и выше,

$$\widetilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = (m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^{t-1}(\varepsilon_0)) \boxtimes (Z_s^{t-1}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_0, \infty)) =$$

$$= (m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^{t-1}(\varepsilon_0)) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_1, \infty) \pmod P.$$

Далее

$$m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^{t-1}(\varepsilon_0) = m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes [M\{Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_1, \infty)]^{-1},$$

и так как $Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ и $X_s^t[\varepsilon_1, \infty)$ независимы, то

$$[M\{Z_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_1, \infty)\}]^{-1} = [m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^t(\varepsilon_1)]^{-1} =$$

$$= [e^{A^{[\varepsilon_1, \varepsilon_0)}(t-s)} \boxtimes e^{A^{\varepsilon_1}(t-s)}]^{-1} = e^{-(A^{[\varepsilon_1, \varepsilon_0)} + A^{\varepsilon_1})(t-s)} = m_s^{t-1}[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^{t-1}(\varepsilon_1).$$

Здесь использовалось условие 3 работы 2. Поэтому $m_s^t[\varepsilon_1, \varepsilon_0) \boxtimes r_s^{t-1}(\varepsilon_0) = r_s^{t-1}(\varepsilon_1)$ и, значит,

$$\widetilde{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) = r_s^{t-1}(\varepsilon_1) \boxtimes X_s^t[\varepsilon_1, \infty) = \hat{X}_s^t[\varepsilon_1, \infty) \pmod P.$$

Замечание 1. В ходе доказательства по сути менялись местами сомножители $Z_s^{t-1}[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ и $r_s^{t-1}(\varepsilon_0)$ в (1). Однако обосновать этот обмен непосредственно в (1) с помощью теоремы 2 [2] нельзя, так как входящие в правую часть (1) сомножители $Z_s^{t-1}[\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ и $X_s^t[\varepsilon_0, \infty)$ зависимы и теорема 2 из [2] не применима.

Замечание 2. Как и в [1], можно показать, что

$$\hat{Z}_s^t[\varepsilon_n, \varepsilon_0) = m_s^{t-1}[\varepsilon_n, \varepsilon_0) \boxtimes Z_s^t[\varepsilon_n, \varepsilon_0) \rightrightarrows Z_s^t(0, \varepsilon_0)$$

равномерно по t и s $(\mathrm{mod}\, P)$ при $\varepsilon_n \downarrow 0$ и получить разложение Леви стохастической полугруппы X_s^t в виде:

$$X_s^t = Z_s^t[\varepsilon_0, \infty) \boxtimes (r_s^t(\varepsilon_0) \boxtimes Z_s^t(0, \varepsilon_0) \boxtimes X_s^t(0, \infty)) \pmod P,$$

где $Z_s^t[\varepsilon_0, \infty)$, $Z_s^t(0, \varepsilon_0)$ — скачкообразные составляющие X_s^t, $X_s^t(0, \infty)$ — непрерывная составляющая X_s^t. $r_s^t(\varepsilon_0) = MX_s^t[\varepsilon_0, \infty) = e^{A^{\varepsilon_0}(t-s)}$ — некоторая неслучайная полугруппа на $G_2(H)$, $A^{\varepsilon_0} \in \sigma_2(H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Буцан, О представлении мультипликативных процессов, УМЖ, 1976, т. 28, № 2.
2. Г. П. Буцан, О произведении стохастических полугрупп, в кн.: Теория случайных процессов, «Наукова думка», Киев, 1976, вып. 4.
3. Г. П. Буцан, О некоторых свойствах мультипликативных процессов, УМЖ, 1969, т. 21, № 6.
4. Г. П. Буцан, Некоторые свойства мультипликативных семейств, в кн.: Теория вероятностей и математическая статистика, Изд-во КГУ, 1969, вып. 1.
5. Г. П. Буцан, Некоторые свойства операторных случайных процессов, Автореферат канд. дисс., Ин-т математики АН УССР, Киев, 1969.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 16.IV 1975 г.