УДК 517.432.1

Р. С. Дагья

Функциональные соответствия специальных функций

В данной заметке развивается метод преобразований Лапласа специальных функций и обобщаются результаты Диткина, Прудникова [1] и Махишвари [2]. Полученные результаты более точны, чем соответствующие результаты Махишвари, в том смысле, что порядок функций Бесселя — произвольная константа, а не символическая переменная, и следовательно, могут успешно применяться в теории дифференциальных уравнений в частных производных (в особенности в тех случаях, когда вводится больше граничных или начальных условий, чем этого требует задача), в теории упругости и функциональных уравнений.

Функция $f(x, y)$ имеет двойное преобразование Лапласа $\varnothing(p, q)$, выражаемое формулой

$$\varnothing(p,q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(px+qy)} f(x,y)\,dxdy, \quad \operatorname{Re}(p,q) > 0$$

и обозначаемое следующим образом:

$$\varnothing(p,q) \doteqdot f(x,y).$$

Эти обозначения взяты из работы Диткина и Прудникова [1].

1. Основной результат. *Двумерное преобразование Лапласа для обобщенной гипергеометрической функции имеет вид*

$$p^{\delta\xi-\lambda} q^{\xi-\sigma} G^{m+1,n+1}_{u+1,v+1}\left(\alpha p^\delta q \,\middle|\, \begin{matrix} 1-\xi, & a_u \\ \sigma-\xi+1, & b_v \end{matrix}\right) \doteqdot \tag{1}$$

$$\doteqdot \frac{\pi^m_{j=1}\Gamma(b_j+\sigma+\xi)\,\pi^n_{j=1}\Gamma(1-a_j-\sigma-\xi)\,\Gamma(\sigma+1)\,x^\lambda y^\sigma}{\pi^v_{j=m+1}\Gamma(1-b_j-\sigma-\xi)\,\pi^u_{j=n+1}\Gamma(a_j+\sigma+\xi)\,\Gamma(\lambda+1)\,\alpha^{\sigma+\xi}} \times$$

$$\times {}_vF_{u+\delta}\left(\begin{matrix}\sigma+\xi+b_v \\ \sigma+\xi+a_u, \Delta(\delta, 1+\lambda)\end{matrix}; -\frac{x^\delta y}{\delta^\delta \alpha}\right)$$

и верно при следующих условиях:

а) $k = m + n - \dfrac{1}{2}(u+v) > 0, \ |\arg\alpha| < k\pi$;

б) $0 \leqslant n \leqslant u, \ 0 \leqslant m \leqslant v, \ v \geqslant 1$;

в) $\operatorname{Re}(a_j + \sigma + \xi) < 0, \ j = 1, 2, \ldots, n$;

г) $\operatorname{Re}(b_j + \xi) > 0, \ j = 1, 2, \ldots, m$;

д) $a_j - b_i$ *не являются положительными целыми числами*, $j = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, m$;

е) λ *и* δ — *положительные целые числа*, $\operatorname{Re}(\sigma) > -1$;

ж) a_u *обозначает* $a_1, a_2, \ldots, a_u$ *и* $\Delta(\delta, \lambda)$ *обозначает* $\dfrac{\lambda}{\delta}, \dfrac{\lambda+1}{\delta}, \ldots, \dfrac{\lambda+\delta_{-1}}{\delta}$.

Доказательство. Обобщенное преобразование Стильтьеса G-функций дается формулой

$$\int_0^\infty \frac{x^{\xi-1}}{(x+\beta)^{\sigma+1}} G^{m,n}_{u,v}\left(\alpha x \,\middle|\, \begin{matrix} a_u \\ b_v \end{matrix}\right) dx = \frac{\beta^{\xi-\sigma-1}}{\Gamma(\sigma+1)} G^{m+1,n+1}_{u+1,v+1}\left(\alpha\beta \,\middle|\, \begin{matrix} 1-\xi, & a_u \\ \sigma+1-\xi, & b_v \end{matrix}\right) \tag{2}$$

(см. [3, с. 165]).

Подставляя $p^\delta q$ вместо β и умножая обе стороны на $p^{\delta(\sigma+1)-\lambda}q$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{p^{\delta(\sigma+1)-\lambda}q}{(p^\delta q+t)^{\sigma+1}}\cdot t^{\xi-1}G_{u,v}^{m,n}\left(\alpha t\,\middle|\,\begin{matrix}a_u\\ b_v\end{matrix}\right)dt =$$

$$= \frac{p^{\delta\xi-\lambda}q^{\xi-\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}\,G_{u+1,v+1}^{m+1,n+1}\left(\alpha p^\delta q\,\middle|\,\begin{matrix}1-\xi, & a_u\\ \sigma-\xi+1, & b_v\end{matrix}\right). \tag{3}$$

Используя известные результаты (см. [1, (2.113), с. 140]), получаем

$$\sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r x^{\lambda+\delta r}y^{\sigma+r}}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\delta r)}\int_0^\infty t^{\sigma+\xi+r-1}G_{u,v}^{m,n}\left(\alpha t\,\middle|\,\begin{matrix}a_u\\ b_v\end{matrix}\right)dt \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{p^{\delta\xi-\lambda}q^{\xi-\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}\,G_{u+1,v+1}^{m+1,n+1}\left(\alpha p^\delta q\,\middle|\,\begin{matrix}1-\xi, & a_u\\ \sigma-\xi+1, & b_v\end{matrix}\right) \tag{4}$$

или

$$\sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r x^{\lambda+\delta r}y^{\sigma+r}}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\delta r)}\ \alpha^{-\sigma-\xi-r}\times$$

$$\times\frac{\pi_{j=1}^m\Gamma(b_j+\sigma+\xi+r)\,\pi_{j=1}^n\Gamma(1-a_j-\sigma-\xi-r)}{\pi_{j=m+1}^v\Gamma(1-b_i-\sigma-\xi-r)\,\pi_{j=n+1}^u\Gamma(a_j+\sigma+\xi+r)}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{p^{\delta\xi-\lambda}q^{\xi-\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}\,G_{u+1,v+1}^{m+1,n+1}\left(\alpha p^\delta q\,\middle|\,\begin{matrix}1-\xi, & a_u\\ \sigma-\xi+1, & b_v\end{matrix}\right).$$

Желаемый результат (1) можно получить, используя соотношения

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},\quad \frac{\Gamma(1-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{(-1)^n}{(\alpha)_n},\quad \alpha_{nm}=m^{nm}\pi_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\alpha+i}{m}\right)_n$$

и просуммировав ряды.

2. Специальные функции в терминах гипергеометрических функций.

Выбирая специальные значения параметров G-функций и используя результаты [3] (формулы (5), (12), (38), (28), (26), (37) и (43)) для выражения (1), получаем

$$p^{\delta\xi-\sigma}q^{\xi-\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha p^\delta q\right)M_{\xi,\sigma-\xi+1/2}(\alpha p^\delta q)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{\Gamma(2\sigma-2\xi+2)}{\Gamma(\lambda+1)\,\alpha^{\sigma+\xi}\Gamma(1-2\xi)}\,x^\lambda y^\sigma\,{}_1F_\delta\left(\begin{matrix}2\xi\\ \Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\ -\frac{x^\delta y}{\alpha\delta^\delta}\right), \tag{5}$$

где δ и λ — положительные целые числа, $\operatorname{Re}(\xi)<\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(\sigma-\xi)>-1$.

$$p^{\delta/2(\sigma+b+\xi)-\lambda}q^{1/2(\xi-\sigma+b)}\exp\left(\frac{1}{2}\alpha q p^\delta\right)W_{-\xi-\sigma-b,1/2(\sigma-\xi-b+1)}(\alpha p^\delta q)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{\Gamma(b+\sigma+\xi)\,x^\lambda y^\sigma}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(b+\xi)\,\alpha^{1/2(\xi\sigma+\ +b)}}\,{}_1F_\delta\left(\begin{matrix}\sigma+\xi+b\\ \Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\ -\frac{x^\delta y}{\alpha\delta^\delta}\right), \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}(b+\xi)>0,\quad \operatorname{Re}(\sigma)>0.$$

$$p^{\delta\xi-\lambda}q^{\xi}S_{1-2\xi,2b}(2\alpha^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2}) \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{x^{\lambda}\alpha^{-\xi}}{2^{2\xi}\Gamma(1+\lambda)}\,{}_2F_{\delta}\left(\begin{matrix}\xi+b,\,\xi-b\\ \Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\,-\frac{x^{\delta}y}{\alpha\delta^{\delta}}\right). \tag{7}$$

$$p^{\delta/2(\xi+b)-\lambda+1/4}q^{\xi/2+b/2+1/4}H_{1/2-\xi-b}(2a^{1/2}p^{\delta/2}q^{1/2}) \doteqdot \tag{8}$$

$$\doteqdot \frac{\alpha^{-\xi/2-b/2-1/4}x^{\lambda}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-b-\xi)}\,{}_2F_{\delta}\left(\begin{matrix}\xi+b,\,1/2\\ \Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\,-\frac{x^{\delta}y}{\alpha\delta^{\delta}}\right),\quad \mathrm{Re}\,(b+\xi)<0.$$

$$p^{\delta/2-\lambda}qJ_b(\alpha^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2})\,J_{-b}(\alpha^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2}) \doteqdot \tag{9}$$

$$\doteqdot \frac{x^{\lambda}y^{-1/2}}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+b)\Gamma(1+\lambda)}\,{}_2F_{\delta}\left(\begin{matrix}b,\,-b\\ \Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\,-\frac{x^{\delta}y}{\alpha\delta^{\delta}}\right),\quad -1<\mathrm{Re}\,(b)<1.$$

$$p^{\delta\xi-\lambda}q^{\xi}[H_{1-2\xi}(2\alpha^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2})-Y_{1-2\xi}(2\alpha^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2})] \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{\cos(1-2\xi)\,\pi\Gamma(2\xi-1/2)}{\pi^{3/2}\Gamma(1+\lambda)\,\alpha^{\xi}}\,x^{\lambda}{}_2F_{\delta}\left(\begin{matrix}2\xi-1/2,\,1/2\\ \Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\,-\frac{x^{\delta}y}{\alpha\delta^{\delta}}\right),\quad \mathrm{Re}\,(\xi)>\frac{1}{2}. \tag{10}$$

$$\begin{gathered}p^{\delta(\xi-3/4)-\lambda}q^{\xi-\sigma-3/4}M_{\xi-3/4,\sigma-\xi+5/4}(2a^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2})\,W_{3/4-\xi,\sigma-\xi+5/4}(2\alpha^{1/2}q^{1/2}p^{\delta/2}) \doteqdot\\ \doteqdot \frac{\Gamma(2\sigma-2\xi+7/2)\,\Gamma(\sigma+\xi+1/4)\,\Gamma(\sigma+\xi-1/4)}{\sqrt{\pi}\alpha^{\sigma+\xi-3/4}\Gamma(5/2-\xi)\,\Gamma(2\xi+\sigma-1/2)\,\Gamma(\lambda+1)}\,x^{\lambda}y^{\sigma}\times\\ \times{}_3F_{1+\delta}\left(\begin{matrix}\sigma+\xi+1/4,\,\sigma+\xi-1/4,\,2\xi-3/2\\ 2\xi+\sigma-1/2,\,\Delta(\delta,1+\lambda)\end{matrix};\,-\frac{x^{\delta}y}{\alpha\delta^{\delta}}\right),\\ \mathrm{Re}\,(\xi)<5/2,\quad \mathrm{Re}\,(\sigma\pm\xi)>-1/4.\end{gathered} \tag{11}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Диткин и А. П. Прудников, Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Физматгиз, М., 1958.
2. М. Л. Махишвари, Некоторые специальные функции и функциональные соответствия, УМЖ, 1972, т. 24, № 5.
3. Y. L. Luke, The special functions and their approximations, vol. 1, 1969, Academic Press.

Индия

Поступила в редакцию 3.VI 1974 г.