УДК 513.6

Г. Т. Коновалов

Об универсальных Г-нормах формальных групп над локальным полем

Пусть k — полное дискретно нормированное поле нулевой характеристики с сове шенным полем вычетов $\varkappa$ характеристики $p > 0$, k_∞/k — дико разветвленное Г-расширение Ивасавы (т. е. Ga! (k_∞/k) изоморфна Z_p—аддитивной группе целых p-адических чисел, k_i для целого $i \geqslant 0$ — подполе k_∞, соответствующее подгруппе $p^i Z_p$ группы $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$, $\mathfrak{o}_i$ для целого $i \geqslant 0$ и для $i = \infty$ — кольцо целых поля k_i, $\mathfrak{m}_i$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{o}_i$, $\mathrm{tr}_i : k_i \to k_{i-1}$, $\mathrm{norm}_i : k_i \to k_{i-1}$ и $\mathfrak{D}_i$ для натурального i — соответственно след, норма и относительная дифферента расширения k_i/k_{i-1}. Пусть, далее, $F(X, Y)$ — коммутативная n-параметрическая формальная группа, определенная над $\mathfrak{o}_0$, h — высота редукции $F(X, Y)$, F_i — $\mathrm{Gal}(k_i/k)$-модуль, определенный на произведении $\mathfrak{m}_i \times \cdots \times \mathfrak{m}_i$ (n раз) с помощью $F(X, Y)$, $N_i : F_i \to F_0$ и $N_i^* : F_i \to F_{i-1}$ — соответствующие норменные гомоморфизмы, F_i^λ для натурального λ — подгруппа F_i, элементы которой принадлежат $\mathfrak{m}_i^\lambda \times \cdots \times \mathfrak{m}_i^\lambda$ (n раз).

В связи с теорией Мазура [1] возникает вопрос о поведении норменных подгрупп $N_i(F_i)$ группы F_0. В работе О. Н. Введенского [2] высказывалось предположение, что для формальных групп с высотой редукции $h > 1$ ответ на этот вопрос можно получить с помощью формулы Тэйта [3] для дифферент $\mathfrak{D}_i$. Цель данной заметки — подтвердить это предположение.

В дальнейшем рассматриваются лишь формальные группы с высотой редукции $h > 1$.

Теорема. *Для любого натурального λ существует такое натуральное s, что $N_s(F_s) \subset F_0^\lambda$.*

Для случая конечного поля вычетов $\varkappa$ отметим два очевидных следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Подгруппа $D_k^\Gamma = \bigcap\limits_i N_i(F_i)$ универсальных Γ-норм группы F_0 тривиальна.*

$\left(\text{Для доказательства этого следствия достаточно заметить, что } \bigcap\limits_\lambda F_0^\lambda = 0\right)$.

Замечание. Тем самым для полных дискретно нормированных полей k нулевой характеристики с конечным полем вычетов получаем еще одно доказательство тривиальности подгруппы универсальных норм $D_k = \bigcap\limits_{l/k} N_{l/k}(F_l)$ группы F_0 (здесь пересечение берется по всем конечным асширениям Галуа l/k, а $\mathrm{Gal}(l/k)$-модули F_l и норменные гомоморфизмы $N_{l/k} : F_l \to F_0$ определяются очевидным способом) — см. [4], где рассмотрен случай произвольной характеристики поля k.

Следствие 2. *Группа когомологий Галуа $H^1(\mathrm{Gal}(k_\infty/k), F_\infty)$ бесконечна.*

(Доказательство этого следствия стандартно [2] — используем частное Эрбрана и существование в F_i когомологически тривиальной подгруппы конечного индекса, которая строится известным способом [5]).

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{m}_i^{d_i}$. Тогда по формуле Тэйта (см. [3, с. 14, следствие 1]) имеем

$$d_i = p^i e + b_i, \tag{1}$$

где e — показатель p в k, а b_i ограничены.

Обозначим через M нижнюю границу для b_i и определим последовательность натуральных чисел λ_i следующим образом:

$$\lambda_0 = \lambda, \ \lambda_i = \max\{1; \lambda_{i-1} - 1; \ p\lambda_{i-1} - p^i e - M\}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Покажем сначала, что для так определенных λ_i выполняется условие:

$$N_i^*(F_i^{\lambda_i}) \subset F_{i-1}^{\lambda_{i-1}}, \tag{2}$$

т. е. $N_i(F_i^{\lambda_i}) \subset F_0^\lambda$.

Пусть $(a)_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$ — столбец размерности n с j-й координатой a и нулевыми остальными координатами. Повторяя рассуждения работы О. Н. Введенского [5], получаем, что для $x \in \mathfrak{m}_i^\gamma$, $i, \gamma = 1, 2, \ldots$,

$$N_i^*((x)_j) \equiv (\mathrm{tr}_i(x))_j + \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{\infty} c_{1r}^j (\mathrm{norm}_i(x))^r \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^{\infty} c_{nr}^j (\mathrm{norm}_i(x))^r \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, \mathrm{tr}_i(\mathfrak{m}_i^{2\gamma})). \qquad (3)$$

Так как высота редукции $F(X, Y)$ больше 1, то $c_{v1}^j \in \mathfrak{m}_0$, $j, v = 1, 2, \ldots, n$ (см. [5] или [4]), и тем самым, по определению λ_i, $\sum_{r=1}^{\infty} c_{vr}^j (\mathrm{norm}_i(x))^r \in \mathfrak{m}_{i-1}^{\lambda_i - 1}$ для $x \in \mathfrak{m}_i^{\lambda_i}$, $j, v = 1, 2, \ldots, n$. Далее, так как $\mathrm{tr}_i(\mathfrak{m}_i^\gamma) = \mathfrak{m}_{i-1}^\mu$, где $\mu = \left[\frac{\gamma + d_i}{p}\right]$ (здесь $[\alpha]$ означает целую часть действительного числа α), то, учитывая (1) и определение λ_i, получаем, что $\mathrm{tr}_i(\mathfrak{m}_i^\gamma) \subset \mathfrak{m}_{i-1}^{\lambda_i - 1}$ для $\gamma \geqslant \lambda_i$. Тем самым, как видно из формулы (3), $N_i^*((x)_j) \in F_{i-1}^{\lambda_i - 1}$ для $x \in \mathfrak{m}_i^{\lambda_i}$, а значит (см. [4]), и $N_i^*(F_i^{\lambda_i}) \subset F_{i-1}^{\lambda_i - 1}$, т. е. для построенных λ_i выполняется условие (2).

Для доказательства теоремы осталось показать, что $\lambda_i = 1$ для всех достаточно больших i.

Предположим, что $\lambda_i = p\lambda_{i-1} - p^i e - M$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\lambda_i = p^i\lambda - ip^i e - M\frac{p^i - 1}{p - 1}$, откуда видно, что в этом случае $\lambda_i < 0$ для достаточно больших i, что противоречит определению λ_i. Таким образом, существует такое натуральное t, что $\lambda_t = \max\{1; \lambda_{t-1} - 1\}$. Отсюда следует, что $\lambda_i = \max\{1; \lambda_{i-1} - 1\}$ для всех $i \geqslant t$, а значит, $\lambda_i = 1$ для всех достаточно больших i.

Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность О. Н. Введенскому, под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Мазур, Рациональные точки абелевых многообразий над башнями числовых полей, Математика (сб. переводов), 1973, т. 17, № 2.
2. О. Н. Введенский, О «универсальных нормах» формальных групп, определенных над кольцом целых локального поля, Изв. АН СССР, сер. матем., 1973, т. 37, № 4.
3. Дж. Тэйт, p-делимые группы, Математика (сб. переводов), 1969, т. 13, № 2.
4. Г. Т. Коновалов, Об универсальных нормах формальных групп, УМЖ, 1975, т. 27, № 1.
5. О. Н. Введенский, Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем. I, Изв. АН СССР, сер. матем., 1964, т. 28, № 5; II, Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, т. 30, № 4.

Львовское отделение
Института экономики АН УССР

Поступила в редакцию 14.VIII 1974 г.