УДК 517.546

В. И. Лаврик

О применении эллиптических функций к решению одного класса краевых задач фильтрации

В работах [1, 2] рассмотрены два случая напорной фильтрации из открытых водоемов при наличии в области фильтрации сильнопроницаемого горизонтального слоя грунта, на границе с которым устанавливается постоянный напор $h = -H_0$. В одном случае ширина каждого из двух водоемов принималась бесконечно большой [1], в другом — конечной величиной [2]. В последнем случае решение краевой задачи при помощи метода конформных отображений сводилось к решению сложной системы интегральных уравнений.

Ниже будем рассматривать фильтрацию из напорного водоема конечных размеров в симметрично расположенные водоприемники, простирающиеся до бесконечности. Область фильтрации z и область комплексного потенциала ω в данном случае имеют вид, изображенный на рисунке, *а*, *б*, где водонепроницаемый участок BC может иметь произвольную форму.

Комплексный потенциал фильтрации $\omega = f(z)$ будем искать в параметрическом виде, причем в качестве области изменения параметра возьмем в комплексной плоскости $w = u + iv$ (рисунок, *в*) прямоугольник $ABCE$, длина которого $|AB| = \frac{1}{2}$, а высота $|BC| = \frac{t}{2}$, где t—неизвестный параметр. Предположим, что известна функция $z = f_1(w)$, конформно отображающая прямоугольник $ABCE$ на область z. Тогда, чтобы найти комплексный потенциал фильтрации $\omega = f_2(w)$ как функцию комплексного параметра w, воспользуемся свойствами вспомогательного течения в прямоугольнике $ABCE$ и свойствами тета-функций [3].

Исходя из области комплексного потенциала ω, легко видеть, что в прямоугольнике $ABCE$ противоположные стороны AB и CE являются водопроницаемыми границами, а противоположные стороны BC и EA — водонепроницаемыми границами (твердыми стенками) области течения w (рисунок, *в*). В точке $D(\beta)$, лежащей на водопроницаемой границе CE, потенциал скорости фильтрации $\varphi(u, v)$ имеет скачок, а именно, при обходе точки D по полуокружности бесконечно малого радиуса меняет свое значение из $\varphi|_{ED} = \varkappa H_0$ на $\varphi|_{DC} = \varkappa H$. Значение функции тока $\psi(u, v)$ в точке D обращается в бесконечность. Таким образом, в точке D имеется точечный вихрь [4, 5].

Найдем вид комплексного потенциала течения в прямоугольнике $ABCE$, воспользовавшись принципом симметрии Римана—Шварца [6, 7] для аналитического продолжения функции $\omega = f_2(w)$ относительно сторон прямоугольника $ABCE$ на всю плоскость параметрического переменного w.

В результате аналитического продолжения и рассмотрения соответствия между точками области комплексного потенциала и точками, симметричными относительно сторон прямоугольников $ABCE$ и $\bar{A}\bar{B}CE$, приходим к выводу, что для точек прямоугольника $B_1B\bar{B}\bar{B}_1$ (рисунок, *в*) имеют место следующие соотношения:

$$\omega(-\bar{w}_0 + 1) = \overline{\omega(w_0)}, \quad \omega(-\bar{w}_0) = \overline{\omega(w_0)} + \text{const}, \tag{1}$$

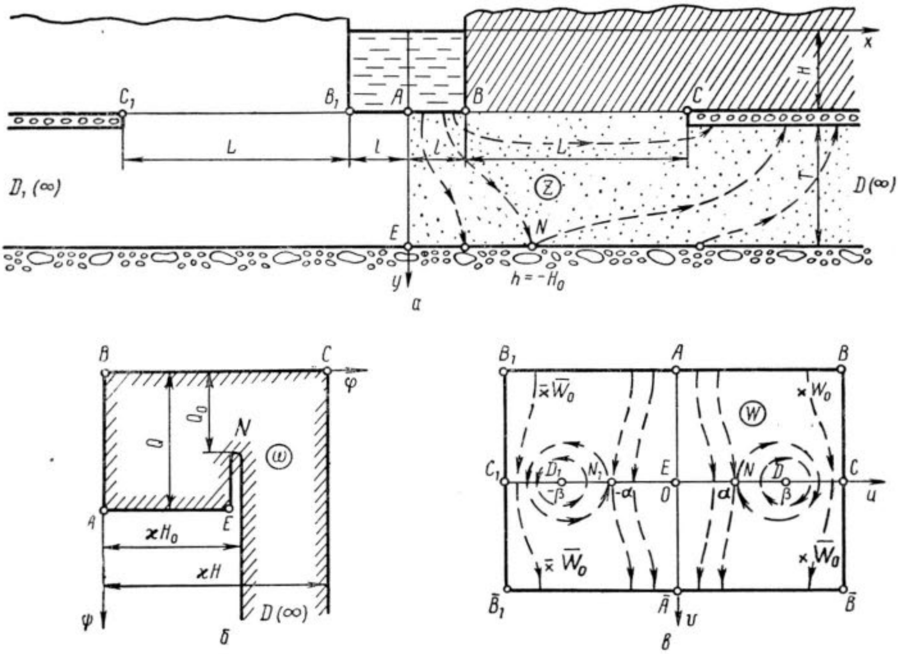
$$\omega(\bar{w}_0) = -\overline{\omega(w_0)} + \text{const}. \quad \omega(\bar{w}_0 - it) = -\overline{\omega(w_0)}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекают равенства

$$\omega(-\overline{w}_0) = \omega(-\overline{w}_0 + 1) + \text{const}, \tag{3}$$

$$\omega(\overline{w}_0) = \omega(\overline{w}_0 + it) + \text{const}. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) выполняются также для произвольных точек w_0, $-w_0$. Следовательно, комплексный потенциал $\omega = f_2(w)$ является квазипериодической в плоскости w функцией с периодами 1 и it, т. е. она изменяется на постоянную величину при изменении значения w на любой из



указанных периодов. Поэтому комплексная скорость $\dfrac{d\omega}{dw}$ вспомогательного течения в плоскости w является двоякопериодической с периодами 1 и $\tau + it$. Прямоугольник $B_1 B\overline{B}\overline{B}_1$ со сторонами 1 и τ можно рассматривать как прямоугольник периодов [3]. Прямоугольник периодов содержит две точки $D(\beta)$ и $D_1(-\beta)$, являющимися вихрями противоположной интенсивности (рисунок, *в*). Из приведенных выше рассуждений следует, что комплексную скорость можно представить в виде

$$\frac{d\omega}{dw} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\frac{\vartheta_1'(w-\beta)}{\vartheta_1(w-\beta)} - \frac{\vartheta_1'(w+\beta)}{\vartheta_1(w+\beta)} + a\right], \tag{5}$$

где $\vartheta_1(w-\beta) = \vartheta_1(w-\beta;\ \tau)$, $\vartheta_1(w+\beta) = \vartheta_1(w+\beta;\ \tau)$ — тета-функции; $\vartheta_1'(w-\beta)$, $\vartheta_1'(w+\beta)$ — их производные; a — в силу соответствия точки является действительным числом.

Легко проверить, что оба слагаемых, входящих в (5), являются мероморфными квазипериодическими функциями. Следовательно, функция (5) будет эллиптической функцией с периодами 1 и τ.

Проинтегрировав равенство (5), найдем искомый комплексный потенциал в следующем виде:

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\ln\frac{\vartheta_1(w-\beta)}{\vartheta_1(w+\beta)} + aw + b\right]. \tag{6}$$

Так как в окрестности вихря функция (6) имеет разложение

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln (w - \beta) + \dots , \tag{7}$$

то, рассматривая разность потенциала слева и справа при обходе точки $w = \beta$ в положительном направлении, найдем

$$\Gamma = 2\varkappa (H - H_0). \tag{8}$$

Воспользовавшись соответствием точек B и C в плоскостях ω и w (рисунок, *б*, *в*), получим два соотношения для определения неизвестных постоянных a и b, входящих в (6), а именно:

$$a = \frac{2\pi}{t}\left(2\beta - \frac{H}{H - H_0}\right), \qquad b = -\frac{a}{2} + i\left(\frac{at}{2} - 2\pi\beta\right). \tag{9}$$

Учитывая полученные соотношения, из соответствия точек N и E в плоскостях ω и w получаем равенства для определения полного фильтрационного расхода Q из конечного водоема AB и определения расхода Q_0, поступающего непосредственно из водоема AB в водоприемник CD:

$$Q = \frac{\varkappa a (H - H_0)}{2\pi}, \qquad Q_0 = \frac{\varkappa (H - H_0)}{\pi}\left[\ln \frac{\vartheta_1 (\alpha + \beta)}{\vartheta_1 (\beta - \alpha)} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) a\right]. \tag{10}$$

Воспользовавшись условием равенства нулю скорости фильтрации в точке N, получим соотношение для определения постоянной α, входящей в (10):

$$\frac{\vartheta_1' (\alpha + \beta)}{\vartheta_1 (\alpha + \beta)} + \frac{\vartheta_1' (\beta - \alpha)}{\vartheta_1 (\beta - \alpha)} + \frac{2\pi}{t}\left(2\beta - \frac{H}{H - H_0}\right) = 0. \tag{11}$$

В случае, если величина H_0 неизвестна, то к полученным соотношениям необходимо прибавить еще одно, которое можно получить из введенного ранее (см. [2]) условия максимума расхода Q_0 в точке α, а именно:

$$\ln \frac{\vartheta_1 (\alpha + \beta)}{\vartheta_1 (\beta - \alpha)} - \frac{4\pi\beta}{t}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0. \tag{12}$$

Неизвестные постоянные β и t определяются после конформного отображения исходной области фильтрации z на вспомогательный прямоугольник W. Таким образом, полученные соотношения позволяют находить решения достаточно широкого класса задач профильной фильтрации при наличии сильнопроницаемого слоя грунта или задач плановой фильтрации при наличии трех открытых водоемов, один из которых имеет конечную ширину.

Определим постоянные β и t в случае напорной фильтрации из конечного водоема AB в водоприемник CD, когда водораздел BC имеет прямолинейное (плоское) основание (рисунок, *а*). Для этого отобразим конформно область фильтрации z на четвертый квадрант плоскости ζ функцией

$$\zeta = \operatorname{th} \frac{\pi (L + l)}{2T} \operatorname{th} \frac{\pi [z - i (T + H)]}{2T}, \tag{13}$$

причем абсциссы точек N, D и B в плоскости ζ будут соответственно равны:

$$\alpha_0 = \operatorname{th} \frac{\pi (L + l)}{2T} \operatorname{th} \frac{\pi x_0}{2T}, \tag{14}$$

$$\beta_0 = \operatorname{th} \frac{\pi (L + l)}{2T}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{m} = \operatorname{th} \frac{\pi (L + l)}{2T} \operatorname{cth} \frac{\pi l}{2T} . \tag{16}$$

Четвертый квадрант плоскости ζ отобразим комформно на прямоугольник $ABCE$ плоскости w при помощи эллиптического интеграла I рода [6, 7]

$$w = \frac{1}{2K(m)} F(\zeta; m), \tag{17}$$

где модуль m определяется равенством (16).

Тогда высота t прямоугольника $B\overline{B}\overline{B}_1B$ определится равенством [7]

$$t = \frac{K'(m)}{K(m)}, \tag{18}$$

где $K(m)$ и $K'(m)$ — полные эллиптические интегралы соответственно с модулем m и $m' = \sqrt{1 - m^2}$.

Неизвестная постоянная β определится таким равенством:

$$\beta = \frac{1}{2K(m)} F(\beta_0; m), \tag{19}$$

где β_0 определяется по формуле (15). Равенство (14) необходимо для определения абсциссы x_0 критической точки N в исходной физической плоскости z.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Лаврик, Решение одной краевой задачи теории фильтрации, УМЖ, 1973, т. 25, № 5.
2. В. И. Лаврик, К обобщению решения одного класса краевых задач теории фильтрации, УМЖ, 1974, т. 26, № 3.
3. Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, «Наука», М., 1970.
4. О. В. Голубева, Курс механики сплошных сред, «Высшая школа», М., 1972.
5. М. И. Гуревич, Теория струй идеальной жидкости, Физматгиз, М., 1961.
6. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.
7. В. И. Лаврик, В. Н. Савенков, Справочник по конформным отображениям, «Наукова думка», Киев, 1970.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 27.XI 1975 г.