УДК 517.946

Я. Б. Лопатинский

Дефектные числа операторов Фредгольма

Целью данной заметки является установление простой оценки дефектных чисел оператора Фредгольма.

1. Пусть M — непустое множество, на котором выделена алгебра Σ подмножеств и комплекснозначная функция μ на Σ, с ограниченной на M вариацией. Пусть $\widetilde{M}$ — нормированное кольцо комплекснозначных функций на M — μ-измеримых и ограниченных; если $U \in \widetilde{M}$, то $|U| = \sup\limits_{x \in M} |U(x)|$.

Рассматривается оператор $\widetilde{K}: \widetilde{M} \to \widetilde{M}$, определяемый формулой

$$\widetilde{K}U(x) = U(x) - \int\limits_M K(x, y)\, U(y)\, \mu(dy),$$

в предположении, что ядро K ограниченно и μ^2-измеримо на $M\times M$ (оператор Фредгольма).

Хорошо известно, что к интегральному уравнению вида

$$U(x)-\int\limits_M K(x, y)\,U(y)\,\mu(dy)=f(x)$$

можно свести системы интегральных уравнений Фредгольма и так называемые «нагруженные» уравнения Фредгольма; наконец, посредством итерирования к случаю ограниченного ядра K может быть приведен случай ядра со слабой особенностью. Уравнения такого типа возникают, например, для регулярной граничной эллиптической задачи в ограниченной области (см., например, [1]).

Рассмотрим семейство операторов $\widetilde{K}_\lambda$, определенных формулой:

$$\widetilde{K}_\lambda U(x)=U(x)-\lambda\int\limits_M K(x, y)\,U(y)\,\mu(dy)\quad (\lambda \text{ — комплексное число}).$$

Пусть $\alpha_\lambda=\dim\operatorname{Ker}\widetilde{K}_\lambda$, $\alpha=\sum\limits_{|\lambda|\leqslant 1}\alpha_\lambda$. Далее будет доказана следующая оценка:

$$\sqrt{\alpha}<6a;\ a=\sup_{x, y\in M}|K(x, y)|\operatorname{var}\mu(M). \tag{1}$$

Очевидно, $\alpha=0$, если $a<1$; таким образом, достаточно доказать эту формулу в предположении $a\geqslant 1$.

2. Здесь приводятся некоторые известные результаты, используемые в доказательстве формулы (1).

Пусть

$$K\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_m\\ y_1, \ldots, y_m\end{pmatrix}=\det\left(K(x_i, y_j)\right)_{i, j=1, m},$$

$$a_0=1,\ \ a_q=\int\ldots\underset{M}{(q)}\ldots\int K\begin{pmatrix}z_1, \ldots, z_m\\ z_1, \ldots, z_m\end{pmatrix}\mu(dz_1)\ldots\mu(dz_m)\qquad (q\geqslant 1),$$

$$D(\lambda)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\lambda^q}{q!}a_q;$$

$\varkappa_{\lambda_1}$ — кратность λ_1-нуля функции D.

В теории Фредгольма хорошо известны формулы

$$|a_q|\leqslant q^{\frac{q}{2}}a^q, \tag{2}$$

$$\alpha_\lambda\leqslant\varkappa_\lambda. \tag{3}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa$ есть нули функции D (с учетом их кратности), расположенные в единичном круге; пусть сначала они различны. Полагая

$$P(\lambda)=\sum_{q=0}^{\varkappa-1}\frac{\lambda^q}{q!}a_q,\quad R(\lambda)=\sum_{q=\varkappa}^{\infty}\frac{\lambda^q}{q!}a_q,$$

получаем

$$P(\lambda_j)=-R(\lambda_j)\qquad (j=1, \ldots, \varkappa).$$

Полином P однозначно определяется числами $P(\lambda_j)$ $(j = 1, \dots, q)$;

$$P(\lambda) = P(\lambda_1) + \sum_{j=1}^{\varkappa-1} (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_j) P(\lambda_1, \dots, \lambda_{j+1}) =$$

$$= - R(\lambda_1) - \sum_{j=1}^{\varkappa-1} (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_j) R(\lambda_1, \dots, \lambda_{j+1}).$$

Здесь P, R соответствующие разделенные разности. Известно, что

$$R(\lambda_1, \dots, \lambda_{j+1}) = \int_0^1 t_1^{j-1} dt_1 \int_0^1 t_2^{j-2} dt_2 \dots \int_0^1 dt_j R^{(j)} (\lambda_1 (1 - t_1) + \lambda_2 t_1 (1 - t_2) + \dots$$

$$\dots + \lambda_j t_1 \dots t_{j-1} (1 - t_j) + \lambda_{j+1} t_1 \dots t_j),$$

$$R^{(j)}(\lambda) = \frac{d^j}{d\lambda^j} R(\lambda) = \sum_{q=\varkappa-j}^{\infty} \frac{\lambda^q}{q!} a_{q+j} \qquad (j = 0, \dots, \varkappa - 1).$$

Это представление пригодно и для кратных нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_\varkappa$ $\left(\varkappa = \sum_{|\lambda| \leqslant 1} \varkappa_\lambda\right)$.

Таким образом, получается равенство

$$1 = P(0) = - R(\lambda_1) - \sum_{j=1}^{\varkappa-1} (-1)^j \lambda_1 \dots \lambda_j R(\lambda_1, \dots, \lambda_{j+1}).$$

Далее,

$$| R(\lambda_1, \dots, \lambda_{j+1}) | \leqslant \int_0^1 t_1^{j-1} dt_1 \dots \int_0^1 dt_j \sup_{|\lambda| \leqslant 1} | R^{(j)}(\lambda) | \leqslant \frac{1}{j!} \sum_{q=\varkappa-j}^{\infty} \frac{1}{q!} | a_{q+j} |.$$

Итак, приходим к неравенству

$$1 \leqslant \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \frac{1}{j!} \sum_{q=\varkappa-j}^{\infty} \frac{1}{q!} | a_{q+j} |.$$

Используя оценки (2) и $\frac{(j+q)!}{j!\,q!} \leqslant 2^{j+q}$, наконец, получаем

$$1 < \varkappa \sum_{q=\varkappa}^{\infty} \frac{q^{\frac{q}{2}} (2a)^q}{q!}. \tag{4}$$

Из этой формулы видно, что $\varkappa$ не должно быть слишком велико по сравнению с a. В дальнейшем уточняется соотношение между ними.

3. Отношение смежных членов в ряде (4) равно

$$\frac{2a}{\sqrt{q+1}} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{2}} < \frac{2\sqrt{e}a}{\sqrt{\varkappa}}.$$

Пусть $\sqrt{\varkappa} > 2\sqrt{e}a$.

Таким образом, из неравенства (4) следует

$$1 < \frac{\varkappa^{\frac{\varkappa}{2}} (2a)^\varkappa}{(\varkappa - 1)!} \frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{e}a}{\sqrt{\varkappa}}} < \frac{2ea}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2ea}{\sqrt{\varkappa}}\right)^{\varkappa-1} \frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{e}a}{\sqrt{\varkappa}}}.$$

Полагая $\sqrt{\varkappa} = 2eRa$, $2ea = \xi$, получаем

$$R^{\xi^2 R^2 - 2}\left(R - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) < \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} .$$

Очевидно, если η — решение уравнения

$$\eta^{\xi^2\eta^2-2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \qquad (\xi \geqslant 2e), \tag{5}$$

то $R < \eta$.

Определяя максимальное значение η как функции ξ, приходим к уравнениям

$$\sqrt{2e}\left(\eta_0 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\eta_0}{\sqrt{\lg \eta_0}} , \tag{6}$$

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{e}\left(\eta_0 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\eta_0^2} . \tag{7}$$

Здесь $\eta_0 = \eta_{\max}$.

При $\xi \geqslant \xi_0$ функция η, определяемая уравнением (5), является убывающей функцией.

Из (7) следует, что $\xi_0 \leqslant 2e$. Следовательно, из уравнения (5) получается следующая оценка: $\eta \leqslant \eta_1$ (при $\xi \geqslant 2e$); η_1 — решение уравнения

$$\eta^{4e^2\eta^2-2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{2e}{\sqrt{2\pi}} . \tag{8}$$

Грубая оценка дает $\eta_1 < 1{,}07$.

Таким образом,

$$R < 1{,}07 \quad \text{и} \quad \sqrt{\alpha} \leqslant \sqrt{\varkappa} < 2\varepsilon\eta_1 a < 5{,}82a;$$

здесь η_1 — решение уравнения (8).

Формула (1) доказана.

Очевидно, $\eta \to 1$ при $\xi = 2ea \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, 1965, т. 20, вып. 5(125).

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила в редакцию 5.VI 1975 г.