УДК 517—53

Н. М. Осадчий

Аппроксимативные единицы в некоторых банаховых алгебрах аналитических функций

Для изучения структуры замкнутых идеалов банаховых алгебр аналитических функций или же упрощения ранее известных доказательств теорем о структуре замкнутых идеалов необходимо уметь в этих алгебрах строить аппроксимативные единицы.

В данной заметке дано описание аппроксимативных единиц в алгебрах A_n всех функций комплексного переменного z, определенных в круге $U = \{|z| \leqslant 1\}$, регулярных всюду внутри этого круга и непрерывных вместе со своими производными до n-го порядка включительно на окружности $|z| = 1$, наделенных нормой

$$\| f \|_{A_n} = \sup_{|z| \leqslant 1} | f^{(k)}(z) | \qquad (0 \leqslant k \leqslant n),$$

и алгебрах H_n^2 $(n > 1)$, состоящих из функций $f(z)$, таких, что $f^{(n)} \in H^2$ с гильбертовой нормой

$$\| f \|_{H_n^2} = \{ \| f \|_{H^2}^2 + \| f^{(n)} \|_{H^2}^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Основным результатом заметки является следующая теорема.

Теорема. *Для произвольной функции* $f \in A_n$, *где* $f(\xi) = f'(\xi) = \dots \dots = f^{(n)}(\xi) = 0$ $(\xi \in E,\ E \subset \partial U)$, *и* $f \in H_n^2$, *где* $f(\xi) = f'(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$ $(\xi \in E,\ E \subset \partial U)$, *существует такая последовательность функций* $\{\varphi_l(z)\}$ $(l = 1, 2, \dots)$, *что*

1) $|\varphi_l^{(k)}(z)| \leqslant [\rho(z)]^k$, *где* $\rho(z) = \min_{\xi \in E} |z - \xi|$, $k = 0, 1, \dots, n$ *для* $f \in A_n$ *и* $k = 0, 1, \dots, n-1$ *для* $f \in H_n^2$;

2) $\varphi_l(z) \to 1$ $(l \to \infty,\ z \in \overline{U} \setminus E)$;

3) $\varphi_l^{(k)}(z) \to 0$ $(l \to \infty,\ z \in \overline{U} \setminus E,\ \ k = 1, 2, \dots, n)$ (*соответственно для* H_n^2 $k = 1, \dots, n-1$).

Любые последовательности функций $\{\varphi_l(z)\}$, принадлежащих алгебрам A_n или H_n^2 и обладающих отмеченными в сформулированной выше теореме свойствами 1) — 3), будем называть аппроксимативными единицами в этих алгебрах.

Для алгебры H_1^2 в случае, когда множество E_1 не более чем счетно, аналогичные вопросы ранее рассмотрены в [1], для алгебры A^∞ — в [2].

Перейдем к доказательству теоремы.

Занумеруем дополнительные дуги S_m $(m = 1, 2, \dots)$ множества E в порядке убывания их длин τ_m.

Обозначим множество концов дополнительных дуг S_m $(m = 1, 2, \dots)$ через E_0 $(\overline{E}_0 = E)$, концы дуг S_m обозначим соответственно через $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\beta_m}$; $\tau_m = \operatorname{mes} S_m = \beta_m - \alpha_m$.

Рассмотрим функцию

$$K(z) = K_1(z) \cdot K_2(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{z - e^{i\alpha_m}}{z - (1 + \tau_m) e^{i\alpha_m}} \right]^{|\log \tau_m| + 1} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{z - e^{i\beta_m}}{z - (1 + \tau_m) e^{i\beta_m}} \right]^{|\log \tau_m| + 1}.$$

Легко показать, что $K(z) \in H^\infty$. Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для произвольного* N_0 *существует постоянная* c *такая, что при* $\rho(z) = \rho(z, E) \to 0$ $[K^c(z)]^{(j)} = o(\rho^{N_0}(z))$ $(j = 0, 1, \dots, n)$, *причем* $K^c(z) \in A_n$.

В самом деле, так как $\dfrac{\rho(z)}{\tau_m} \leqslant \dfrac{1}{2}$ $(|z| = 1)$, $\lim_{m \to \infty} \tau_m = o$ и $\lim_{m \to \infty} \dfrac{|\log \tau_m| + 1}{\log \dfrac{2}{\tau_m}} = 1$, то существует M_1, что при $z\in S_m$ $(m=M_1+1,\ M_1+2,\dots)$

$$K(z)|<\left[\frac{\rho(z)}{\tau_m}\right]^{|\log\tau_m|+1}\leqslant\exp\left\{-\log\frac{1}{\rho(z)}(|\log\tau_m|+1)\frac{\log 2}{\log\dfrac{2}{\tau_m}}\right\}\leqslant[\rho(z)]^{\log 2}. \tag{1}$$

Если же $z\in S_m$ $(m=1,2,\dots,M_1)$, то

$$|K(z)|<\left(\frac{1}{\tau_{M_1}}\right)^{|\log\tau_{M_1}|+1}[\rho(z)]^{|\log\tau_{M_1}|+1}. \tag{2}$$

Исходя из неравенств (1) и (2), получаем: существует c, что $K^c(z)=$ $=o\,[\rho^{N_0+2n}(z)]$ $(\rho(z)\to 0,\ |z|=1)$.

Учитывая условие Берлинга — Карлесона, сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\tau_m$ и сказанное выше, имеем $[K^c(z)]'=o\ (\rho^{N_0+2n-2}(z))$ $(\rho(z)\to 0,|z|=1)$. Принимая во внимание, что

$$[K^c(z)]^{(j)}=\sum_{r=0}^{j-1}c_{j-1}^r[K^c(z)]^{j-1-r}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}c(|\log\tau_m|+1)\frac{-\tau_m e^{i\alpha_m}}{(z-e^{i\alpha_m})[z-(1+\tau_m)e^{i\alpha_m}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}c(|\log\tau_m|+1)\frac{-\tau_m e^{i\beta_m}}{(z-e^{i\beta_m})[z-(1+\tau_m)e^{i\beta_m}]}\right\}^{(r)}$$

получаем:

$$[K^c(z)]^{(j)}=o(\rho^{N_0}(z))\quad(\rho(z)\to 0,\ |z|=1,\ j=0,1,\dots,n).$$

Так как функция $K^c(z)$ голоморфна и ограничена в круге $|z|<1$, предельные значения ее n раз непрерывно дифференцируемы на окружности ∂U, то $K^c(z)\in A_n$.

Из одной теоремы типа Фрагмена — Линделефа следует, что и при $|z|<1$

$$[K^c(z)]^{(j)}=o(\rho^{N_0}(z))\ (\rho(z)=\rho(z,E_0)=\rho(z,E)\to 0,\qquad j=0,1,\dots,n).$$

Так как $H_n^2\subset A_n$, то и $K^c(z)\in H_n^2$.

Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Существует $l_0(\varepsilon)$, что при $l\geqslant l_0(\varepsilon)$

$$|[K_l^c(z)]^{(j)}|<c_0[\rho(z)]^N<\varepsilon\qquad(j=0,1,\dots,n,\ z\in\partial U\setminus\overline{\Gamma}_l), \tag{3}$$

где

$$K_l^c(z)=\prod_{m=l+1}^{\infty}\left[\frac{z-e^{i\alpha_m}}{z-(1+\tau_m)e^{i\alpha_m}}\right]^{c(|\log\tau_m|+1)}\times$$

$$\times\prod_{m=l+1}^{\infty}\left[\frac{z-e^{i\beta_m}}{z-(1+\tau_m)e^{i\beta_m}}\right]^{c(|\log\tau_m|+1)},$$

$$\overline{\Gamma}_l=\bigcup_{m=1}^{l}\overline{S}_m.$$

Для каждой из точек $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\beta_m}$ $(m=1,\dots,l)$ построим последовательности точек $\{e^{i\theta_k^{(m)}}\}$ и $\{e^{i\theta_k^{*(m)}}\}$ таким образом, чтобы точки $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\beta_m}$ были предельными для соответственно построенных последовательностей, причем длины $\gamma_k^{(m)}$ и $\gamma_k^{*(m)}$ дополнительных дуг каждого из множеств $\{e^{i\theta_k^{(m)}}\}$ и $\{e^{i\theta_k^{*(m)}}\}$ $(k = 1, 2, \dots;\ m = 1, \dots, l)$ удовлетворяли бы условию Берлинга — Карлесона и достаточно быстро стремились бы к нулю.

Устремим каждую из последовательностей $\{e^{i\theta_k^{(m)}}\}$ и $\{e^{i\theta_k^{*(m)}}\}$ $(m=1, \dots, l)$ к точкам $e^{i\alpha_m}$ и $e^{i\beta_m}$ со стороны дуги S_m. Выберем длины дополнительных дуг для каждого из множеств $\{e^{i\theta_k^{(m)}}\}$ и $\{e^{i\theta_k^{*(m)}}\}$ следующим образом:

$$\gamma_k^{(1)} = \gamma_k^{(2)} = \dots = \gamma_k^{(l)}, \quad \gamma_k^{*(m)} = \gamma_k^{(m)} \qquad (k = 2, 3, \dots),$$

$$\gamma_1^{(m)} = 2\pi - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \dots, l).$$

Положим, например, $\gamma_k^{(m)} = \frac{\tau_k}{3^{k^3}}$ $(k = 2, 3, \dots;\ m = 1, \dots, l)$. Тогда для этих $\gamma_k^{(m)}$ получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(m)} (|\log \gamma_k^{(m)}| + 1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{3^{k^3}} [|\log \tau_k| + k^3 \log 3 + 1] <$$

$$< \frac{1}{3^{(l+1)^3}}\, \varepsilon + \left[\frac{2 \log 3}{2^{(l+1)^2}} + \frac{1}{3^{(l+1)^2}}\right] \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) < \frac{1}{2^{l^2}}\,.$$

Свяжем с концами дуг S_m $(m = 1, 2, \dots, l)$ следующие функции f_{l+m}:

$$f_{l+m}(z) = \Phi_{1m}(z)\, \Phi_{2m}(z) =$$

$$= \prod_{k=l+m}^{\infty} \left[\frac{z - e^{i\theta_k^{(m)}}}{z - (1 + \gamma_k^{(m)})\, e^{i\theta_k^{(m)}}}\right]^{|\log \gamma_k^{(m)}|+1} \prod_{k=l+m}^{\infty} \left[\frac{z - e^{i\theta_k^{*(m)}}}{z - (1 + \gamma_k^{(m)})\, e^{i\theta_k^{*(m)}}}\right]^{|\log \gamma_k^{(m)}|+1}.$$

Введем обозначение $L_l(z) = \prod_{m=1}^{l} f_{l+m}(z)$. Тогда $|[L_l(z)]'| < \frac{1}{2^{l^2}}$.

Рассмотрим функцию $\varphi_l(z) = \widetilde{K}_l(z)\, L_l(z)$, где $\widetilde{K}_l = K_l^c$. Очевидно, $\widetilde{K}_l(z) \to 1$ $(l \to \infty)$. Так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\log f_{l+j}(z)| < \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=l+j}^{\infty} \gamma_i^{(m)} |\log \gamma_j^{(m)}| \frac{3}{2(1-r)} < \frac{3}{2(1-r)} \frac{1}{2^{l^2}},$$

то функция $\prod_{j=1}^{\infty} f_{l+j}(z)$ аналитична и ограничена в круге $|z| < 1$. Поэтому $\prod_{j=\nu}^{\infty} f_{l+j}(z) \to 1$ при $\nu \to \infty$ или, иначе, для произвольной $\varepsilon > 0$ при достаточно больших l $\left|\prod_{j=1}^{\infty} f_{l+j}(z) - 1\right| < \varepsilon$, а следовательно, при таких l $|L_l(z) - 1| < 2\varepsilon$ и $\varphi_l(z) \to 1$ $(l \to \infty)$.

Покажем теперь, что $|\varphi_l^{(j)}(z)| \leqslant c\rho^j(z)$, где $\rho(z)=\min\limits_{\xi\in E}|z-\xi|$, $j=0, 1, \ldots, n$. Имеем

$$[\varphi_l(z)]' = \widetilde{K}'_l(z)\, L_l(z) + L'_l(z)\, K_l(z),$$

где $[L_l(z)]' = \sum\limits_{i=1}^{l} \Phi'_i(z) \tilde{\prod\limits_{m=1}^{l}} \Phi_m(z)$, $\Phi_m(z) = f_{l+m}(z)$, произведение $\tilde{\prod\limits_{m=1}^{l}}$ обозначает, что пропущен множитель, записанный перед ним.

Учитывая, что

$$\Phi'_m(z) = \Phi_m(z)\left\{\sum_{k=l+m}^{\infty} c(|\log\gamma_k^{(m)}|+1)\frac{-\gamma_k^{(m)}e^{i\theta_k^{(m)}}}{(z-e^{i\theta_k^{(m)}})[z-(1-\gamma_k^{(m)})e^{i\theta_k^{(m)}}]}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=l+m}^{\infty} c(|\log\gamma_k^{(m)}|+1)\frac{-\gamma_k^{(m)}e^{i\theta_k^{*(m)}}}{(z-e^{i\theta_k^{*(m)}})[z-(1+\gamma_k^{(m)})e^{i\theta_k^{*(m)}}]}\right\},$$

получим

$$|L'_l(z)| \leqslant \frac{1}{2^{l^2}}\rho_1^{N-2}2l \leqslant \rho^{N-2}(z)\frac{2l}{2^{l^2}},$$

где $\rho_1(z) = \min\limits_{\xi'\in\widetilde{E}_0}|z-\xi'|$, $\widetilde{E}_0$ — множество нулей функции $L_l(z)$, $z\in\Gamma_l$. Непосредственно можно подсчитать, что

$$|L_l^{(j)}(z)| \leqslant \rho^{N-2j}\frac{2^j l^j}{2l^2}. \tag{4}$$

Так как при достаточно больших l $\frac{l^j}{2^l}<1$, $j=1, \ldots, n$, то при $N\geqslant 3n$

$$|L_l^{(j)}(z)| \leqslant \rho^n(z) \qquad (z\in\Gamma_l). \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что

$$|\varphi_l^{(k)}(z)| \leqslant [\rho(z)]^k. \tag{6}$$

Учитывая неравенство (6) и что $\sum\limits_{m=l}^{\infty}\tau_m(|\log\tau_m|+1)\to 0$ при $l\to\infty$, получим, что для произвольного $\varepsilon>0$ при $l>l_0(\varepsilon)$ $|\varphi_l^{(k)}(z)|<\varepsilon$ для $z\in\overline{U}\setminus E$.

Из доказательства ясно, что функции $\varphi_l(z)$ аппроксимируют единицу и в алгебре H_n^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Осадчий, Структура главных идеалов одного кольца аналитических функций, УМЖ, 1971, т. 23, № 6.
2. B. A. Taylor and D. L. Williams, Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, Can. J. Math., 1970, 22, N 6.
3. В. С. Королевич, Некоторые банаховы алгебры аналитических функций, Изв. АН АрмССР, сер. Математика, 1970, № 4.

Житомирский педагогический институт

Поступила в редакцию 8.IX 1975 г.