УДК 513.88

О. Г. Сторож

Разложение по собственным функциям некоторых самосопряженных операторов

Пусть L, L_0 соответственно максимальный и минимальный дифференциальные операторы, действующие в пространстве $L_2(a, b)$ и порожденные самосопряженным квазидифференциальным выражением $l[y]$ порядка s. Наложим на это выражение следующие ограничения:

1) задача Коши для уравнения $l[y] - \lambda y = f$ при каждом $f \in L_2(a, b)$ и при каждом $\lambda \in C$(C — поле комплексных чисел) имеет единственное решение, откуда, в частности, следует, что операторы L и L_0 — взаимно сопряженные; таким образом, L_0 — симметрический оператор;

2) L_0 имеет равные дефектные числа $(m; m)$, поэтому существуют самосопряженные расширения этого оператора.

Пусть $y, z \in D(L)$ ($D(L)$ — область определения оператор L). Положим

$$\{y, z\} \stackrel{\text{def}}{=} (Ly, z) - (y, Lz)$$

и рассмотрим в пространстве $L_2(a, b)$ самосопряженный оператор T такой, что

$$D(T) = \{y \in D(L) : \{y, w_j\} = (y, \varphi_j),\ j = 1, \ldots, r;\ \{y, w_j\} = 0,\ j = r+1, \ldots, m\}, \tag{1}$$

$$Ty = t[y] \stackrel{\text{def}}{\equiv} l[y] + \sum_{j=1}^{r} \{y, w_{m+j}\}\varphi_j + \sum_{q=1}^{p} (y, \chi_q)\psi_q, \quad y \in D(T), \tag{2}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, $\psi_1, \ldots, \psi_p$, $\chi_1, \ldots, \chi_p \in L_2(a, b)$, причем $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — линейно независимые, а ядро $K(x, \xi) = \sum_{q=1}^{p} \psi_q(x)\overline{\chi_q(\xi)}$—симметрическое, т. е. $K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$. Далее, $w_1, \ldots, w_{m+r}$ — элементы из $D(L)$, линейно независимые по модулю $D(L_0)$, а $(\cdot, \cdot)$ — знак скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$.

Используя терминологию работы [1], можно сказать, что оператор T, определенный согласно (1) — (2), является родственным паре (L, L_0). В данной работе речь идет о разложении по (обобщенным) собственным функциям этого оператора. Указан ряд случаев, при которых эти собственные функции являются решениями уравнения $t[y] = \lambda y$.

Прежде чем формулировать основные результаты, отметим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При всяком невещественном λ резольвента $(T-\lambda)^{-1}$ оператора T является интегральным оператором с ядром Карлемана.*

Действительно, пусть L_u — произвольное самосопряженное расширение оператора L_0. Известно [2, 3], что при рассматриваемых λ $(L_u-\lambda)^{-1}$ — интегральный оператор с ядром Карлемана. Справедливость теоремы следует теперь непосредственно из того факта, что $(T-\lambda)^{-1}-(L_u-\lambda)^{-1}$ — конечномерный оператор [1].

Из теоремы 1 и результатов, изложенных в [4], следует, что существует спектральное ядро $\Omega(x, t, \lambda)$ и неотрицательная мера $\rho(\lambda)$ такие, что

$$(f, g)=\int_{-\infty}^{\infty}(P(\lambda) f, g)\, d\rho(\lambda), \quad f, g \in H_{+}, \tag{3}$$

$$(Tf, g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(P(\lambda) f, g)\, d\rho(\lambda), \; f \in H_{+}, \; g \in H_{+} \cap D(T),$$

где H_{+} — некоторое плотное линейное многообразие в $L_2(a, b)$,

$$(P(\lambda) f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \int_a^b \Omega(x, t, \lambda) f(t) \overline{g(x)}\, dx dt,$$

причем имеет место разложение спектрального ядра по обобщенным собственным функциям оператора T:

$$\Omega(x, t, \lambda)=\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \omega_\alpha(x, \lambda) \overline{\omega_\alpha(t, \lambda)}, \; x, t \in[a, b]. \tag{4}$$

Остановимся несколько подробнее на двух случаях, когда эти собственные функции могут быть найдены в явном виде как решения уравнения $t[y]=\lambda y$. Сначала рассмотрим случай, когда $l[y]$ — выражение порядка $2n$ с коэффициентами, определенными на полуоси $[0, \infty)$, и регулярным концом $x=0$, а L_0 имеет индекс дефекта $(n; n)$. Известно [2], что при этих условиях существуют комплексные числа α_{jk} такие, что

$$\{y, w_j\}=\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(0) \stackrel{\text{def}}{=} u_j(y), \quad j=1, \ldots, n+r,$$

где $w_1, \ldots, w_{n+r}$ те же, что в (1) — (2). Далее, положим в (2) $\psi_q=\chi_q=0$, $q=1, \ldots, p$. Условия, которыми определяется рассматриваемый оператор T, принимают следующий вид:

$$D(T)=\{y \in D(L): u_j(y)=(y, \varphi_j), \; j=1, \ldots, r ; \; u_j(y)=0, \; j=r+1, \ldots, n\}, \tag{5}$$

$$Ty=l[y]+\sum_{j=1}^{r} u_{n+j}(y) \varphi_j, \quad y \in D(T). \tag{6}$$

Пусть $y_1(x, \lambda), \ldots, y_{2n}(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения $l[y]=\lambda y$ такая, что $y_k^{[j-1]}(0, \lambda)=\delta_k^j$, $j, k=1, \ldots, 2n$, а $\Phi_k(x, \lambda)$ — решение уравнения $l[y]-\lambda y=\varphi_k$, $k=1, \ldots, r$, такое, что $y^{[j-1]}(0)=0$, $j=1, \ldots, 2n$. Положим

$$Y_j \stackrel{\text{def}}{=} y_j-\sum_{k=1}^{r} \alpha_{n+k, j} \Phi_k, \; j=1, \ldots, 2n. \tag{7}$$

Лемма 1. *Уравнение* $l[y] + \sum_{j=1}^{r} u_{n+j}(y)\varphi_j = \lambda y$ *при всяком комплексном* λ *имеет ровно* $2n$ *линейно независимых решений. Этими решениями являются* $Y_1, \ldots, Y_{2n}$, *определенные согласно* (7).

Замечание 1. Легко видеть, что при фиксированном x $Y_j(x, \lambda)$ является целой аналитической функцией параметра λ и что $Y_k^{[j-1]}(0, \lambda) = \delta_k^j$, $j, k = 1, \ldots, 2n$.

Из леммы 1 следует, что при сделанных выше предположениях относительно оператора T в (4) достаточно положить $N_\lambda = 2n$, а ω_α рассматривать как линейную комбинацию $Y_1, \ldots, Y_{2n}$. Равенство Парсеваля (3) можно конкретизировать.

Точнее говоря, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Существует матричная функция распределения* $\sigma(\lambda) = \{\sigma_{jk}(\lambda)\}$, $j, k = 1, \ldots, 2n$, *такая, что формулы*

$$\gamma_j(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\overline{Y_j(x, \lambda)}\,dx, \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{8}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2n} \gamma_j(\lambda) Y_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda) \tag{9}$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения $L_2(0, \infty)$ *на* $L_2(\sigma)$ *и* $L_2(\sigma)$ *на* $L_2(0, \infty)$ *соответственно, которые переводят друг в друга операторы* T *и* Λ_σ (Λ_σ — *оператор умножения на независимое переменное в* $L_2(\sigma)$). *При этом интегралы в* (8) *и* (9) *сходятся в смысле метрики* $L_2(\sigma)$ *и* $L_2(0, \infty)$ *соответственно и*

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2n} \gamma_j(\lambda)\overline{\gamma_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Замечание 2. Элементы матрицы распределения $\sigma(\lambda)$, которые связаны с мерой $\rho(\lambda)$, фигурирующей в (3), соотношениями

$$d\sigma_{jk}(\lambda) = \left(\frac{\partial^{j+k}\Omega}{\partial x^j \partial t^k}\right)(0, 0, \lambda)\, d\rho(\lambda), \quad j, k = 1, \ldots, 2n,$$

могут быть найдены исходя из ядра резольвенты оператора T аналогично тому, как это делается для дифференциальных операторов [2].

Пусть теперь $l[y]$ — произвольное самосопряженное квазидифференциальное выражение, удовлетворяющее условиям 1), 2), а функции $\varphi_1, \ldots \varphi_r$, фигурирующие в (1) — (2), тождественно равны нулю. Другими словами, рассмотрим оператор $T = L_u + V$, где L_u — самосопряженный дифференциальный оператор в $L_2(a, b)$, а

$$Vy = \sum_{q=1}^{p} (y, \chi_q)\psi_q, \ y \in L_2(a, b).$$

Пусть $a < c < b$, а $\Psi_q(x, \lambda)$ — решение уравнения $l[y] - \lambda y = \psi_q$, $q = 1, \ldots, p$, удовлетворяющее условиям $y^{[k-1]}(c, \lambda) = 0$, $k = 1, \ldots, s$. Положим: $(y, z) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b y(x)\overline{z(x)}\,dx$.

Лемма 2. *Если все* ψ_q, χ_q, $q = 1, \ldots, p$, *финитны в* (a, b), *а точку* c *можно выбрать так, что определитель*

$$\begin{vmatrix} (\Psi_1, \chi_1) + 1, & (\Psi_2, \chi_1), & \ldots, & (\Psi_p, \chi_1) \\ (\Psi_1, \chi_2), & (\Psi_2, \chi_2) + 1, & \ldots, & (\Psi_p, \chi_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\Psi_1, \chi_p), & (\Psi_2, \chi_p), & \ldots, & (\Psi_p, \chi_p) + 1 \end{vmatrix}$$

отличный от нуля при каждом вещественном λ, *то уравнение*

$$l[y] + \sum_{q=1}^{p} (y, \chi_q) \psi_q - \lambda y = 0$$

при каждом вещественном λ *имеет ровно* s *линейно независимых решений* $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_s$ *таких, что*

$$\widetilde{Y}_j^{[k-1]}(c, \lambda) = \delta_j^k, \ j, k = 1, \ldots, s.$$

Если оператор $T = L_u + V$ удовлетворяет условиям леммы 2, то можно доказать теорему о разложении по собственным функциям этого оператора, которая формулируется так же, как и теорема 2, с точностью до замены $L_2(0, \infty)$ на $L_2(a, b)$, $2n$ на s, $Y_1, \ldots, Y_{2n}$ на $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_s$.

В заключение выражаю благодарность В. Э. Лянце за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Э. Лянце, О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами, ДАН СССР 1972, т. 204, № 3.
2. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», М., 1969.
3. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, спектральная теория, «Мир», М., 1966.
4. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев, 1965.

Львовский государственный университет

Поступила в редакцию 14.VI 1974 г.