УДК 513.88:519.49

Є. П. Білан, О. В. Семенцов

Про ізоморфізм R-нормованих модулів

В замітці виділяється один клас модулів, на який можна узагальнити теорему про ізоморфізм скінченно-вимірних лінійних нормованих просторів, які мають одну розмірність.

Нехай R — напівпроста банахова комутативна алгебра, яка містить в собі 1, $\mathfrak{M}$ — простір її максимальних ідеалів (див. [1,2]). X — унітарний R-модуль. З кожним максимальним ідеалом $M \in \mathfrak{M}$ зв'яжемо оператор T_M, який визначається таким чином:

$$(\forall\lambda \in R)\,(\forall M \in \mathfrak{M}) : T_M\lambda = \lambda\,(M),$$

де $\lambda\,(M)$ — значення неперервної комплекснозначної функції на максимальному ідеалі M, відповідної елементові λ при гельфандовському ізоморфізмі R на $C\,(\mathfrak{M})$ — кільце неперервних комплекснозначних функцій, визначених на $\mathfrak{M}$ (див. [1, 2]) Для елементів із X оператор T_M визначається умовами

1) $(\forall M \in \mathfrak{M})$ $T_M : X \to B_M$, де B_M — комплексний банахів простір;
2) $(\forall x,\, y \in X) : T_M\,(x + y) = T_M x + T_M y$;
3) $(\forall\lambda \in R)\,(\forall x \in X) : T_M\,(\lambda x) = (T_M\lambda)\,(T_M x)$.

Означення 1. Елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ із X назвемо лінійно незалежними, якщо $\forall M \in \mathfrak{M}$ відношення

$$\sum_{1}^{n} (T_M\lambda_k)\,(T_M x_k) = 0 \Rightarrow T_M\lambda_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Зауважимо, що вимога лінійної незалежності є більш сильною, ніж вимога свободи системи. Лінійно незалежну систему елементів, яка породжує X, назвемо базисом. Під розмірністю будемо розуміти число елементів базиса R-модуля X.

Далі припускаємо, що X задовольняє такі умови:

1) $\forall M \in \mathfrak{M}$ в X визначено оператор T_M;
2) в X існує базис.

Крім того припустимо, що R — напівпроста комутативна C^*-алгебра (див. [3]).

Означення 2. R-модуль X назвемо R-нормованим, якщо кожному елементові $x \in X$ поставлено у відповідність невід'ємний * елемент $|x| \in R$, причому виконані умови

1) $|x| \geqslant 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
4) $\forall M \in \mathfrak{M}$ $T_M|x| = \|T_M x\|_{B_M}$.

*Відносно цього поняття, а також визначення та властивостей $|\lambda| = \sqrt{\lambda\lambda^*}$ $(\lambda \in R)$ див. [3].

У R-нормованому модулі X вводиться поняття збіжності, звичайним чином погоджене з топологією у R. Будемо говорити, що послідовність $\{x_n\}$ елементів із X збігається до $x \in X$, якщо $|||x_n - x|||_R \to 0$, $n \to \infty$. У випадку повноти R-нормованого модуля X відносно введеної збіжності можна по аналогії говорити про простори типу B_R^*. Неважко впевнитися, що R-нормований модуль X є топологічним модулем (див. [5]). Розглянувши множину $R^n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ $T_M(\lambda) = (\lambda_1(M), \lambda_2(M), \ldots, \lambda_n(M))$, одержимо простіший приклад скінченно-вимірного R-нормованого модуля:

$$|\lambda| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Повнота R^n випливає із того, що збіжність в R^n є покоординатною збіжністю.

Розглянутий приклад вартий уваги тому, що справедлива така теорема.

Теорема. *Всякий R-нормований модуль X скінченної розмірності n ізоморфний R^n, і, таким чином, усі такі модулі ізоморфні.*

Під ізоморфізмом R-нормованих модулів X і Y розуміємо взаємно неперервний ізоморфізм X на Y.

Доведення теореми аналогічне доведенню відповідної теореми для лінійних нормованих просторів (див. [6]) з використанням такої леми.

Лема. *Нехай $f: K \to C'(\mathfrak{M})$, де K — деяка множина, $C'(\mathfrak{M})$ — кільце усіх дійсних неперервних функцій, заданих на бікомпакті $\mathfrak{M}$, впорядковане звичайним чином. Припустимо, що $\{f(K)\}$ рівномірно обмежене зверху (знизу). Для того щоб верхня (нижня) обвідна $f(K)$ належала $C'(\mathfrak{M})$, достатньо, щоб*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall M_0 \in \mathfrak{M} \ \ \forall (M_n, n \in D, \geqslant): \lim_n M_n = M_0$$

$$\forall (x_n \in K, n \in D, \geqslant) \ \ \exists n^* \in D \ \ \exists x_0 \in K: \ |f(x_{n^*})(M_{n^*}) - f(x_0)(M_0)| < \varepsilon.$$

Доведення. Припустимо, що $\{f(K)\}$ обмежене зверху. Тоді (див. [7]) $\sup f(K) = \varphi$ є напівнеперервною знизу функцією на $\mathfrak{M}$. Доведемо, що φ напівнеперервна також і зверху, тобто борелівська множина функції φ $P_\alpha = \{M \in \mathfrak{M} \mid \varphi(M) \geqslant \alpha\}$ замкнена для будь-якого α. Зафіксуємо α і припустимо, що M_0 гранична для P_α. Тоді існує направленість $\{M_n \in \mathfrak{M}, n \in D, \geqslant\}$, яка збігається до M_0 (див. [8]).

Візьмемо довільно $\varepsilon > 0$. Згідно з визначенням φ

$$\forall M_n \ \ \exists x_n \in K: f(x_n)(M_n) > \varphi(M_n) - \varepsilon.$$

Нехай $n^* \in D$, $x_0 \in K$, такі, що для одержаних нами

$$\{M_n, n \in D, \geqslant\}, \ \{x \in K, n \in D, \geqslant\} \ \ |f(x_{n^*})(M_{n^*}) - f(x_0)(M_0)| < \varepsilon.$$

Тоді очевидно,

$$\varphi(M_0) \geqslant f(x_0)(M_0) > f(x_{n^*})(M_{n^*}) - \varepsilon > \varphi(M_n) - 2\varepsilon \geqslant \alpha - 2\varepsilon,$$

$\varphi(M_0) \geqslant \alpha$, тобто $M_0 \in P_\alpha$ і P_α замкнена. Із напівнеперервності φ зверху й знизу випливає твердження леми.

Автори дякують Ю. І. Черському, який звернув їхню увагу на це питання.

---

* Вперше, напевно, простір, нормований елементами деякого абстрактного простору, розглянув Л. В. Канторович (див. [4], там же використано позначення B_k).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз, 1960, 315 с.
2. Наймарк Н. А. Нормированные кольца, М., «Наука», 1968, 664 с.
3. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления, М., «Наука», 1974, 399 с.
4. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., Гостехиздат, 1950.
5. Бурбаки Н. Общая топология (Основные структуры), М., «Наука», 1968, 271 с.
6. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа, М., «Наука», 1965, 519 с.
7. Бурбаки Н. Общая топология (Числа и связанные с ними группы и пространства), М., Физматгиз, 1959, 247 с.
8. Келли Дж. Л. Общая топология, М., «Наука», 1968, 381 с.

Симферопольський державний
університет

Надійшла до редакції
25.III 1975 р.