УДК 513.6

*О. М. Введенський, І. С. Круп'як*

# Зауваження про невиродженість спаровування Тейта в когомологіях Галуа скінченних модулів над загальним локальним полем

У цій замітці на конкретному прикладі підтверджується висловлене в [1] твердження: для загальних локальних полів [1], мабуть, має місце аналог теореми дуальності Тейта-Шатца в когомологіях Галуа скінченних модулів над локальним полем [2, 3] типу двосторонньої невиродженості.

Позначимо $k$ — загальне локальне поле характеристики нуль з квазіскінченним полем лишків $\varkappa$ характеристики $p > 0$, $k_s$ — сепарабельне замикання $k$. $G = \mathrm{Gal}(k_s \mid k)$ тонологізована за Крулем. $M$ —скінченний тривіальний $G$-модуль. Нехай ($i = 0, 1, 2$)

$$H^i(k, M) \times H^{2-i}(k, \mathrm{Hom}(M, k_s^*)) \to H^2(k, k_s^*) \tag{1}$$

спаровування Тейта в когомологіях Галуа групи $G$ [3], породжене спаровуванням

$$M \times \mathrm{Hom}(M, k_s^*) \to k_s^*. \tag{2}$$

Нарешті, для періодичної абелевої групи $X$, нехай $X^*$ її група характерів за Понтрягіним.

Твердження. *Якщо $k$ містить всі корені $p$-го степеня з одиниці, то спаровування* (1) *двосторонньо невироджене.*

Зауваження. Спаровування (1) (див. [4]) є дуальністю скінченних абелевих груп, коли $M$ — скінченний дискретний $G$-модуль порядку взаємно простого з $p$ навіть при довільній характеристиці $k$. Це можна одержати буквальним повторенням міркувань П. Пуату [5], наведених для локального основного поля. Якщо ж $M$ — скінченний дискретний $G$-модуль, то, взагалі кажучи, група $H^1(k, M)$ безмежна і міркування П. Пуату потребують модифікування.

Доведення твердження. I. Випадок $M = Z/pZ$. Про двосторонню невиродженість спаровування (1) для $i = 0,2$ в розглянутій ситуації можна переконатися прямим обчисленням.

Двостороння невиродженість спаровування (1) для $i = 1$, є, по суті, відомою властивістю двосторонньої невиродженості $\mathrm{mod}\,(k^*)^p$ символа Гільберта $(a, b)$, де $a, b \in k$, як це легко зрозуміти із роботи [6].

II. «Відкручення.» Нехай $M$ тривіальний $G$-модуль порядку $p^t$ $(t > 1)$, $N$ його підмодуль порядку $p^{t-1}$. Двовимірні когомології Галуа модуля $M$ і модуля $\widetilde{M} = \operatorname{Hom}(M, k_s^*)$ скінченні за теорією полів класів. Припустимо, що для модуля $N$ при $i = 0, 2$ спаровування (1) є дуальністю скінченних абелевих груп і що породжений спаровуванням (1) гомоморфізм $\varphi_1(N) : H^1(k, N) \to (H^1(\widetilde{k}, N))^*$ є мономорфізмом і усюди щільним вкладенням, і тим самим для $N$ справедливе твердження. Покажемо, що це має місце і для $M$.

Доведення дуальності скінченних абелевих груп для $i = 0$ при спаровуванні (1) стандартне. Для $i = 2$ відхилення від стандарту полягає в такому. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками, звичайно побудовану за точною послідовністю

$$0 \to N \to M \to Z/pZ \to 0 \tag{3}$$

і спаровуванням (1):

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, Z/pZ) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1(Z/pZ)"'] & H^2(k, N) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k, M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2(M)"'] & H^2(k, Z/pZ) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(H'(k, \widetilde{Z/pZ}))^* \arrow[r, "\psi"] & (H^0(k, \widetilde{N}))^* \arrow[r] & (H^0(k, \widetilde{M}))^* \arrow[r] & (H^0(k, \widetilde{Z/pZ}))^* \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Епіморфність $\varphi_2(M)$ очевидна. При доведенні мономорфності $\varphi_2(M)$ необхідно буде під час проведення стандартного ходу міркування «леми про п'ять» брати не прообраз необхідного елемента $(H^0(k, \widetilde{N}))^*$ при $\psi$, а його повний прообраз, який є відкритою множиною в $(H^1(k, \widetilde{Z/pZ}))^*$, а потім скористатися усюди-щільністю $\varphi_1(Z/pZ)$. Для того щоб довести мономорфність і усюди-щільність визначеного спаровуванням (1) гомоморфізму

$$\varphi_1(M) : H^1(k, M) \to (H^1(k, \widetilde{M}))^*,$$

розглянемо комутативну діаграму з точними рядками, звичайно побудованою за точною послідовністю (3) і спаровуванням (1):

$$\begin{tikzcd}
H^0(k, Z/pZ) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k, N) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi_1(N)"'] & H^1(k, M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1(M)"'] & H^1(k, Z/pZ) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1(Z/pZ)"'] & H^2(k, N) \arrow[d, "\varphi_2(N)"'] \\
(H^2(k, \widetilde{Z/pZ}))^* \arrow[r] & (H^1(k, \widetilde{N}))^* \arrow[r, "\alpha"'] & (H^1(k, \widetilde{M}))^* \arrow[r, "\beta"'] & (H^1(k, \widetilde{Z/pZ}))^* \arrow[r, "\gamma"'] & (H^0(k, \widetilde{N}))^*.
\end{tikzcd}$$

Мономорфність $\varphi_1(M)$ очевидна. Доведемо, що $\varphi_1(M)$ — усюди щільне відображення. Насамперед зауважимо, що $\beta$ — відкрите відображення, тому що ядро $\gamma$ відкрите в $(H^1(k, \widetilde{Z/pZ})^*$. Нехай $U$ — довільна непорожня відкрита множина в $(H^1(k, \widetilde{M}))^*$, тоді внаслідок відкритості $\beta$, усюди щільності $\varphi_1(Z/pZ)$ і мономорфності $\varphi_2(N)$, знайдеться такий елемент $a \in H^1(k, M)$, що $\varphi_1(M)(a) \in U + \operatorname{Im} \alpha$. Таким чином, $\alpha^{-1}(\varphi_1(M)(a) - U)$ — непуста відкрита множина в $(H^1(k, \widetilde{N}))^*$. Із усюди щільності $\varphi_1(N)$ випливає існування такого елемента $b \in H^1(k, N)$, що $\alpha\varphi_1(N)(b) \in \varphi_1(M)(a) - U$, тоді $\varphi_1(M)(a - \delta b) \in U$, що і треба було довести.

## ЛІТЕРАТУРА


1. О. Н. Введенский, О локальных «полях классов» эллиптических кривых.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1973, т. 37, № 1.
2. S. Shatz, Cohomology of artinian group schemes over local Fieds.— Ann. Math., 72, 1964, 411—449.

3. J. T a t e, Duality theorems in Galois cohomology over number fields, Proc. Congress, Stockholm, 1962, 282—295.
4. Ж.-П. С е р р, Когомологии Галуа, «Мир», М., 1968.
5. P. G. P o i t o u, Cohomologie Galoisienne des modules Finis, Paris, Dunod, 1967.
6. J. P. S e r r e, Corps locaus, Paris, 1962.

Львівський філіал математичної фізики
Інституту математики АН УРСР
Львівський політехнічний інститут

Надійшла до редакції
9.IX 1974 р.