УДК 519.3

С. Ф. Морозов, В. В. Петров

Застосування методу М. М. Боголюбова для розв'язування нерегулярних розривних задач варіаційного числення

В замітці методом М. М. Боголюбова [1] досліджується додатно визначена нерегулярна варіаційна задача на визначення мінімуму інтегралів в непараметричній формі

$$I[y]=\int_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{1}$$

в класі розривних функцій в припущенні, що порядок росту інтегранта F

$$F(x, y, y') \geqslant \Psi(|y'|), \tag{2}$$

де $\lim\limits_{|y'|\to\infty}\Psi(|y'|)/|y'|=\infty$, може вироджуватись на скінченному числі прямих $x=x_i$, паралельних осі oy.

1. Припустимий клас розривних функцій (клас НП). Нехай спрямлювана крива C, що має абсолютно неперервне параметричне зображення $f(t)\equiv\{x=x(t),\ y=y(t),\ \dot{x}(t)\geqslant 0,\ 0\leq t\leq 1\}$ в області $\Omega:\{a\leqslant x\leqslant b, |y|\leqslant y_0\}$ (a, b, y_0 — задані числа) і з'єднує задані точки (a, a_1), (b, b_1), має не більш ніж скінченну множину відрізків d_i, паралельних осі oy. Позначимо через $P'\equiv(x, 0)$ проекцію точки $P\equiv(x, y)$ на осі ox. Кожній точці P' з інтервалу $[a, b]$ поставимо у відповідність сукупність всіх $y\in C$, які мають своєю проекцією P'. Тим самим одержуємо функцію $y=y(x)$, взагалі кажучи, не однозначну, причому $y(x)$ не залежить від вибору параметричного зображення кривої C. Так визначені функції $y=y(x)$ вважатимемо функціями класу НП, припустимим класом функцій нашої задачі.

Легко бачити, що функції $y(x)$ класу НП мають не більш ніж скінченне число точок розриву $x=x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Зокрема, зазначимо, що клас абсолютно неперервних функцій міститься в класі НП.

Нехай функція F задовольняє такі умови:

1) $F(x, y, z)>0$ визначена і неперервна разом з частинними похідними до другого порядку включно за сукупністю змінних $(x, y)\in\Omega$, $-\infty<z<+\infty$.

2. $\lim\limits_{z\to\pm\infty}F(x, y, z)/z=\pm\infty$ для всіх $(x, y)\in\Omega$ за виключенням скінченного числа прямих $x=x_i$, на яких існує границя $\lim\limits_{z\to\pm\infty}F(x_i, y, z)/z=W(x_i, y, \operatorname{sign} z)$, рівномірна відносно $y\in[-y_0, y_0]$, де $W(x_i, y, \operatorname{sign} z)$ неперервна щодо y, $|y|\leqslant y_0$. З [2] випливає, що при цих умовах функціонал $I[y]$ для функцій $y=y(x)$ класу НП набирає вигляду

$$J[y]=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}F(x, y, y')\,dx+\sum_{i=0}^{n}\int_{\bar{y}_i}^{y_i}W(x_i, \xi, \operatorname{sign}(y_i-\bar{y}_i))\,d\xi, \tag{3}$$

де x_i, x_j — точки розриву функції $y=y(x)$, $y_i=y(x_i+0)$, $\bar{y}_i=y(x_i-0)$, $x_0=a$, x_n-b. Якщо $y(x)$ — абсолютно неперервна функція, то $J[y]=I[y]$.

2. Допоміжний функціонал $H[y]$ [1]. Нехай $\mu_\delta(y_0)=\inf J[y]$ для функцій $y(x)$ класу НП, що належать околу $G_\delta(y_0)$, де $y_0(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ — довільна задана функція класу НП. Оскільки при $\delta\to 0$ $\mu_\delta(y_0)$ зростає, то існує границя (скінченна чи нескінченна), яку позначимо через $H[y_0]$. Тим самим на клас функцій $y(x)\in$ НП визначено функціонал $H[y]$.

Нехай $\mu_1 = \inf J[y]$ і $\mu = \inf H[y]$ за всіма припустимими функціями $y(x)$, $a \leqq x \leqq b$ класу НП. Легко бачити, що $\mu_1 = \mu$ [1].

3. Побудова функціоналу $J^*[y]$. Нехай функція $F(x, y, z,)$ задовольняє умови $(1, 2,)$ а також такі додаткові умови:

3) $F(x, y, z) \geqslant m\sqrt{1 - z^2}$, де $m > 0$ — стале число, що не залежить від x, y, z, $(x, y) \in \Omega, -\infty < z < +\infty$;

4) нехай S_ρ^i — ρ-окіл прямої $x = x_i$. Тоді для будь-якого ρ і $\Omega_\rho = \Omega - \sum_i S_\rho^i$ знайдеться додатне число z_ρ таке, що для $(x, y) \in \Omega_\rho$ і всіх $z, |z| \geqslant z_\rho$ справджується нерівність $F(x, y, z) \geqslant \Psi(z)$, де $\Psi(z)$ визначена при $z \in (0, \infty)$ і $\lim\limits_{z\to\infty} \Psi(z)/z = \infty$.

Позначимо $F(z) \equiv F(\xi, \eta, z)$, де ξ, η — сталі числа. Назвемо точку z_0 сильною (напівсильною) (див. [1]), якщо для будь-якої іншої точки z вірно таке:

$$F(z) - F(z_0) - (z - z_0) F_z(z_0) > 0 \quad (\geqslant 0).$$

Тоді пряма $-\infty < z < +\infty$ розбивається не більш ніж на зчисленну множину $T(\xi, \eta)$ інтервалів (z_{M_k}, z_{N_k}), в яких містяться лише напівсильні і несильні точки. Якщо ж точка $z \bar{\in} T(\xi, \eta)$, то вона в силу побудови буде сильною. Визначимо інтегрант Φ так:

$$\Phi(\xi, \eta, z) = \begin{cases} F(\xi, \eta, z), & z \bar{\in} T(\xi, \eta), \\ F(\xi, \eta, z_{M_k}) \dfrac{z_{N_k} - z}{z_{N_k} - z_{M_k}} + F(\xi, \eta, z_{N_k}) \dfrac{z - z_{M_k}}{z_{N_k} - z_{M_k}}, & z \in T(\xi, \eta). \end{cases}$$

З побудови функції Φ і умов 1) — 4) на інтегрант F маємо:

а) $\Phi(x, y, z) > 0$ визначена і неперервна разом з частинними похідними першого порядку щодо сукупності змінних $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$ і

$$F(x, y, z) \geqslant \Phi(x, y, z) \geqslant m\sqrt{1 + z^2}$$

для всіх x, y, z з області визначення;

в) Φ — опукла функція щодо z, тобто $E(x, y, \bar{z}, z) \geqslant 0$ для $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < z, \bar{z} < +\infty$, і, крім того, функція $\Phi(x, y, z)$ задовольняє умови 2) і 4). Тоді для довільної функції $y(x)$ класу НП вірне зображення функціоналу $J^*[y]$ у вигляді, аналогічному (3):

$$J^*[y] = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Phi(x, y, y')\, dx + \sum_{i=0}^{n} \int_{\bar{y}_i}^{y_i} W(x_i, \xi, \operatorname{sign}(y_i - \bar{y}_i)\, d\xi.$$

З [2] для функціоналу $J^*[y]$ випливає теорема існування розв'язку.

Теорема 1. *Нехай функція $\Phi(x, y, z)$ задовольняє умови цього пункту. Тоді задача на визначення $\inf J^*[y]$ завжди розв'язна в класі функцій НП, якщо існує принаймні одна припустима функція $\bar{y}(x)$, для якої $J^*[\bar{y}] < +\infty$. Функція, що реалізує $\inf J^*[y]$, може мати розриви в точках $x = x_i$.*

Повторюючи міркування М. М. Боголюбова [1, с. 232—234], використовуючи теорему 1 і лему про апроксимацію [2], можна довести, що

$$H[y] = J^*[y] \tag{4}$$

для будь-якої припустимої функції $y(x)$ класу НП.

4. **Основна теорема.** В силу теореми 1, (4), а також рівності $\inf J[y] = \inf H[y]$ в класі НП вірна така теорема.

Теорема 2. *Нехай інтегрант $F(x, y, z)$ варіаційної задачі на визначення $\inf J[y]$ на класі функцій НП задовольняє умови 1)—4). Тоді для того, щоб існував розв'язок поставленої задачі, необхідно і достатньо, щоб серед функцій, які існують і дають абсолютний мінімум інтеграла $J^*[y]$ в класі функцій НП, була така функція, для якої $J^*[y] = J[y]$.*

5. Властивості розв'язків рівняння Ейлера. Нехай інтегрант F варіаційної задачі задовольняє додаткові вимоги:

5) для довільного напівсильного відносно (x, y) числа z справджується нерівність $F_{zz}(x, y, z) > 0$;

6) $F(x, y, z) \leq A(x, y)\,\omega(|z|)$, $F_y(x, y, z) \leq B(x, y)\,\omega(|z|)$, де $A(x, y)$, $B(x, y)$ — обмежені функції і $\lim\limits_{|z|\to\infty} \omega(|z|)/|z| = \infty$.

Вірна така теорема.

Теорема 3. *Нехай інтегрант $F(x, y, z)$, $(x, y) \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, задовольняє умови 1) — 6). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться функція, $z_\varepsilon(x)$, визначена так:*

$$z_\varepsilon(x) = \{y_\varepsilon(x),\ x \in [a, x_i - \omega_\varepsilon],\ [x_i + \sigma_\varepsilon, b]; \qquad \chi_\varepsilon(x),\ x \in [x_i - \omega_\varepsilon,\ x_i + \sigma_\varepsilon]\},$$

де $y_\varepsilon(x)$ — функція, що складається із скінченного числа екстремалів рівняння Ейлера, $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\omega_\varepsilon + \sigma_\varepsilon}[(x - x_i + \omega_\varepsilon)\, y_\varepsilon(x_i + \sigma_\varepsilon) - (x - x_i - \sigma_\varepsilon) \times \times y_\varepsilon(x_i - \omega_\varepsilon)]$ ($\omega_\varepsilon, \sigma_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), така що $J[z_\varepsilon] - \mu_1 < \varepsilon$, де $\mu_1 = \inf J[y]$ в класі функцій НП з фіксованою точкою розриву $x = x_i$.

Зокрема, звідси випливає, що якщо існує лише скінченне число розв'язків рівняння Ейлера, то задача на $\inf J[y]$ в класі НП розв'язна.

Доведення теореми 3 грунтується на існуванні абсолютного мінімуму функціоналу $J^*[y]$ в класі НП (див. теорему 1) і проводиться методом М. М. Боголюбова [1, § 15].

ЛІТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Новые методы в вариационном исчислении. Избр. труды в трех томах. Т. 1, К., «Наук. думка», 1969, с. 145—256.
2. Морозов С. Ф. О разрывных решениях одного класса квазирегулярных задач.— Мат. заметки, 1974, 16, № 2, с. 305—315.

Горьківський державний університет

Надішла до редакції 6.I 1975 р.