УДК 517.9

Т. Ст. Ніколова, Д. Д. Байнов

Про існування і єдиність розв'язку крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь наднейтрального типу

1. Вступ

В цій роботі розглянуто крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь наднейтрального типу першого порядку і для інтегро-диференціальних рівнянь наднейтрального типу другого порядку. Доведено теореми існування і єдиності розв'язку за допомогою відповідного вибору метрики функціонального простору [1, 2], в якому розглядається рівняння.

2. Крайова задача для системи рівнянь другого порядку

1. Постановка задачі. Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\ddot{x}(t) = f\{t, x(t), \dot{x}(t), x(\tau^{x(t)}), \dot{x}(\tau^{x(t)}), \ddot{x}(\tau^{x(t)});$$

$$\int_0^t F[t, s, x(s), \dot{x}(s), \ddot{x}(s), x(\tau^{x(s)}), \dot{x}(\tau^{x(s)}), \ddot{x}(\tau^{x(s)})]\, ds\}, \quad t \in I = [0, T], \quad (2.1)$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ з крайовими умовами

$$A_0 x(0) + A_1 x(T) + B_0 \dot{x}(0) + B_1 \dot{x}(T) = 0;$$

$$C_0 x(0) + C_1 x(T) + D_0 \dot{x}(0) + D_1 \dot{x}(T) = 0. \quad (2.2)$$

Тут A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 0, 1)$ — сталі $n \times n$-матриці. Перетворений аргумент $\tau^{x(t)}$ має вигляд $\tau^{x(t)} = \tau(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$.

Функції $\tau(t, u_1, u_2, u_3) = \tau(t, \xi)$, $F(t, s, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) = F(t, s, \eta)$ і $f(t, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, w) = f(t, \zeta)$ визначені відповідно в областях

$$G_\tau = I \times G_1 \times G_2 \times G_3; \qquad G_F = I \times I \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_1 \times G_2 \times G_3;$$

$$G_f = I \times G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4,$$

де

$$G_i = \{\psi : |\psi| \le g_i\}, \ i = 1, 2, 3 \quad (g_i = \mathrm{const} > 0),$$

$$G_4 = \{\psi : |\psi| \le \overline{F}T\} \quad (F = \mathrm{const} > 0)$$

($|\cdot|$ — деяка норма в дійсному n-вимірному просторі R^n).

Припускатимемо, що справджуються такі умови.

1′. Матриці A, B, C, D і $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, де $A = A_0 + A_1$, $B = TA_1 + B_0 + B_1$, $C = C_0 + C_1$, $D = TC_1 + D_0 + D_1$ — неособливі.

2′. Існує невід'ємна інтегровна в I функція $\Gamma(t)$ така, що

$$\Gamma_0 = \sup_{t \in I} \Gamma(t) \le g_3; \qquad \beta_0 + \Gamma_1 \le g_2; \qquad \alpha_0 + T\beta_0 + \Gamma_2 \le g_1,$$

де

$$\alpha_0 = |\tilde{A}(\Gamma_1 B_1 + \Gamma_2 A_1) + \tilde{C}(\Gamma_1 D_1 + \Gamma_2 C_1)|,$$

$$\beta_0 = |\tilde{B}(\Gamma_1 B_1 + \Gamma_2 A_1) + \tilde{D}(\Gamma_1 D_1 + \Gamma_2 C_1)|$$

і

$$\tilde{A} = (BD^{-1}C - A)^{-1}; \qquad \tilde{B} = (AC^{-1}D - B)^{-1}; \qquad \tilde{C} = (DB^{-1}A - C)^{-1};$$

$$\tilde{D} = (CA^{-1}B - D)^{-1}; \qquad \Gamma_1 = \int_0^T \Gamma(t)\, dt; \qquad \Gamma_2 = \int_0^T dt \int_0^t \Gamma(t_1)\, dt_1.$$

3′. В областях G_F, G_f і G_τ функції F, f і τ задовольняють умови Ліпшіца щодо всіх аргументів з константами Θ, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3; L, M_1, M_2, N_1, N_2, N_3, P і λ, μ_1, μ_2, μ_3 відповідно.

4′. В області G_f функція f задовольняє нерівність

$$\sup_{\zeta \in G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4} |f(t, \zeta)| \le \Gamma(t).$$

5′. Функція $\tau(t, \xi)$ задовольняє нерівність $0 \le \tau(t, \xi) \le t$, $(t, \xi) \in G_\tau$.

6′. $b \geqslant 2\sqrt{ac}$, де

$$a = \mu_3 N_3; \qquad b = 1 - \Gamma_0^* \mu_3 - N_3(\lambda + \gamma^*); \qquad c = (L + \Gamma^* + PK) + \Gamma_0^*(\lambda + \gamma^*)$$

і

$$\Gamma^* = M_1\gamma + M_2\Gamma_0; \qquad \Gamma_0^* = N_1\gamma + N_2\Gamma_0; \qquad \gamma^* = \mu_1\gamma + \mu_2\Gamma_0;$$

$$K = W + \Theta T; \qquad \gamma = \beta_0 + T\Gamma_0; \qquad W = \sup_{(t,s,\eta)\in\Theta_F} |F(t, s, \eta)| \quad (W < \overline{F}).$$

7′. $V = N_3 + \mu_3(N_1\gamma + N_2\Gamma_0 + N_3\omega) - 1 < 0$, де $\omega = \frac{1}{2a}(b - \sqrt{b^2 - 4ac})$.

Запровадимо позначення

$$X = 2P[P_1 + Q_1 + \mu_1(Q_1\gamma + Q_2\Gamma_0 + Q_3\omega)],$$

$$Y = 2[M_1 + N_1 + \mu_1(N_1\gamma + N_2\Gamma_0 + N_3\omega) + P(P_2 + Q_2) + \mu_2 P(Q_1\gamma + Q_2\Gamma_0 + Q_3\omega)];$$

$$Z = 2(M_2 + N_2) + 2\mu_2(N_1\gamma + N_2\Gamma_0 + N_3\omega) + P(P_3 + Q_3) + \mu_3 P(Q_1\gamma + Q_2\Gamma_0 + Q_3\omega).$$

Легко можна довести, що при виконанні умови 7′ рівняння

$$X\frac{1}{\rho^3} + Y\frac{1}{\rho^2} + Z\frac{1}{\rho} + V = 0$$

має єдиний додатний корінь $\frac{1}{\rho_1}$.

В просторі $C^n(I)$ неперервних n-вимірних дійсних функцій $z: I \xrightarrow{z} R^n$ запроваджуємо метрику, породжену нормою $\|z\| = \sup\{|z(t)|e^{-\rho t} : t \in I\}$, де $\rho > \rho_1$.

Позначимо через Ω множину всіх функцій $z \in C^n(I)$, що задовольняють умови

$$|z(t)| \leqslant \Gamma(t), \quad t \in I; \tag{2.3}$$

$$|z(t) - z(\bar{t})| \leqslant \omega|t - \bar{t}|, \quad t, \bar{t} \in I. \tag{2.4}$$

Розв'язком задачі (2.1), (2.2) називатимемо таку функцію $x(t)$, яка визначена і двічі диференційовна на I, задовольняє рівняння (2.1) і крайові умови (2.2), друга похідна якої належить Ω.

2. Існування і єдиність розв'язку.

Теорема 1. *Нехай справджуються умови* 1′—7′ *і нерівності*

$$K_0 < e^{-\rho T}; \tag{2.5}$$

$$K_1 < e^{-\rho T}, \tag{2.6}$$

де

$$K_0 = (\widetilde{A}B_1 + \widetilde{C}D_1)\rho + T(\widetilde{B}B_1 + \widetilde{D}D_1)\rho + T(\widetilde{B}A_1 + \widetilde{D}C_1) + (\widetilde{A}A_1 + \widetilde{C}C_1);$$

$$K_1 = \widetilde{B}B_1 + \widetilde{D}D_1 + \frac{1}{\rho}(\widetilde{B}A_1 + \widetilde{D}C_1).$$

Тоді крайова задача (2.1), (2.2) *має єдиний розв'язок.*

Доведення. Нехай оператор Π діє в Ω за формулою

$$\Pi z(t) = f\Big\{t, x(t), y(t), x(\tau^{x(t)}), y(\tau^{x(t)}), z(\tau^{x(t)});$$

$$\int_0^t F[t, s, x(s), y(s), z(s), x(\tau^{x(s)}), y(\tau^{x(s)}), z(\tau^{x(s)})]\,ds\Big\}, \quad t \in I,$$

де

$$x(t)=\alpha+t\beta+\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} z(t_2)\,dt_2; \qquad y(t)=\beta+\int_0^t z(t_1)\,dt_1 \tag{2.7}$$

і

$$\alpha=\widetilde{A}\left[B_1\int_0^T z(t)\,dt+A_1\int_0^T dt\int_0^t z(t_1)\,dt_1\right]+\widetilde{C}\left[D_1\int_0^T z(t)\,dt+C_1\int_0^T dt\int_0^t z(t_1)\,dt_1\right];$$
$$(2.8)$$
$$\beta=\widetilde{B}\left[B_1\int_0^T z(t)\,dt+A_1\int_0^T dt\int_0^t z(t_1)\,dt_1\right]+\widetilde{D}\left[D_1\int_0^T z(t)\,dt+C_1\int_0^T dt\int_0^t z(t_1)\,dt_1\right].$$

Безпосередньо перевіряється, що операторне рівняння $z=\Pi z$ еквівалентне крайовій задачі (2.1), (2.2).

Покажемо, що $\Pi\Omega\subset\Omega$. Дійсно, з умови 4′ виходить, що функція Πz задовольняє умову (2.3) при $z\in\Omega$.

Із (2.7), умов 2′ і 3′ при $t,\bar t\in I$ випливають оцінки

$$|x(t)-x(\bar t)|\leqslant\gamma|t-\bar t|; \tag{2.9}$$

$$|y(t)-y(\bar t)|\leqslant\Gamma_0|t-\bar t|; \tag{2.10}$$

$$|\tau^{x(t)}-\tau^{x(\bar t)}|\leqslant(\lambda+\gamma^*+\omega\mu_3)|t-\bar t|. \tag{2.11}$$

Із умови 3′ та оцінок (2.9) — (2.11) одержуємо

$$|\Pi z(t)-\Pi z(t)|\leqslant[L+\Gamma^*+(\Gamma_0^*+N_3\omega)(\lambda+\gamma^*+\omega\mu_3)+PK]|t-\bar t|. \tag{2.12}$$

В силу умов теореми коефіцієнт перед $|t-\bar t|$ в (2.12) дорівнює ω, тобто

$$|\Pi z(t)-\Pi z(\bar t)|\leqslant\omega|t-\bar t|, \quad z\in\Omega; \quad t,\bar t\in I.$$

Доведено, що $\Pi\Omega\subset\Omega$.

Всі умови принципу Банаха про нерухому точку будуть виконані, якщо Π — стискуючий оператор на множині Ω.

Нехай z, $\widetilde z\subset\Omega$. З визначення норми в $C^n(I)$ виходить

$$|z(t)-\widetilde z(t)|\leqslant\|z-\widetilde z\|\,e^{\rho t}, \quad t\in I. \tag{2.13}$$

Якщо $\widetilde x(t)$ і $\widetilde y(t)$ відповідають $\widetilde z(t)$ за формулами (2.7), то з (2.7), (2.8), (2.5) і (2.6) одержуємо

$$|x(t)-\widetilde x(t)|\leqslant\frac{1}{\rho^2}(K_0e^{\rho T}+e^{\rho t})\|z-\widetilde z\|\leqslant\frac{2}{\rho^2}e^{\rho t}\|z-\widetilde z\|; \tag{2.14}$$

$$|y(t)-\widetilde y(t)|\leqslant\frac{1}{\rho}(K_1e^{\rho T}+e^{\rho t})\|z-\widetilde z\|\leqslant\frac{2}{\rho}e^{\rho t}\|z-\widetilde z\|. \tag{2.15}$$

Із 3′, (2.13)—(2.15), 7′ і 5′ виходить

$$|\tau^{x(t)}-\tau^{\widetilde{x(t)}}|\leqslant\left(\frac{2\mu_1}{\rho^2}+\frac{2\mu_2}{\rho}+\mu_3\right)e^{\rho t}\|z-\widetilde z\|$$

и

$$|\Pi z(t)-\Pi\widetilde z(t)|\leqslant M_1|x(t)-\widetilde x(t)|+M_2|y(t)-\widetilde y(t)|+N_1|x(\tau^{x(t)})-$$
$$-\widetilde x(\tau^{\widetilde x(t)})|+N_2|y(\tau^{x(t)})-\widetilde y(\tau^{\widetilde x(t)})|+N_3|z(\tau^{x(t)})-\widetilde z(\tau^{\widetilde x(t)})|+$$
$$+P\int_0^t\{P_1|x(s)-\widetilde x(s)|+P_2|y(s)-\widetilde y(s)|+P_3|z(s)-\widetilde z(s)|+Q_1|x(\tau^{x(s)})-$$

$$- \widetilde{x}(\tau^{\widetilde{x}(s)})| + Q_2|y(\tau^{x(s)}) - \widetilde{y}(\tau^{\widetilde{x}(s)})| + Q_3|z(\tau^{x(s)}) - \widetilde{z}(\tau^{\widetilde{x}(s)})|\} ds \leq$$

$$\leq M_1 \frac{2}{\rho^2} e^{\rho t} \|z - \widetilde{z}\| + M_2 \frac{2}{\rho} e^{\rho t} \|z - \widetilde{z}\| + N_1[|x(\tau^{x(t)}) - x(\tau^{\widetilde{x}(t)})| +$$

$$+ |x(\tau^{\widetilde{x}(t)}) - \widetilde{x}(\tau^{\widetilde{x}(t)})|] + N_2[|y(\tau^{x(t)}) - y(\tau^{\widetilde{x}(t)})| + |y(\tau^{\widetilde{x}(t)}) - \widetilde{y}(\tau^{\widetilde{x}(t)})|] +$$

$$+ N_3[|z(\tau^{x(t)}) - z(\tau^{\widetilde{x}(t)})| + |z(\tau^{\widetilde{x}(t)}) - \widetilde{z}(\tau^{\widetilde{x}(t)})|] +$$

$$+ P\int_0^t \Big\{P_1 \frac{2}{\rho^2} e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| + P_2 \frac{2}{\rho} e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| + P_3 e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| + Q_1[|x(\tau^{x(s)}) -$$

$$- x(\tau^{\widetilde{x}(s)})| + |x(\tau^{\widetilde{x}(s)}) - \widetilde{x}(\tau^{\widetilde{x}(s)})|] + Q_2[|y(\tau^{x(s)}) - y(\tau^{\widetilde{x}(s)})| + |y(\tau^{\widetilde{x}(s)}) -$$

$$- \widetilde{y}(\tau^{\widetilde{x}(s)})|] + Q_3[|z(\tau^{x(s)}) - z(\tau^{\widetilde{x}(s)})| + |z(\tau^{\widetilde{x}(s)}) - \widetilde{z}(\tau^{\widetilde{x}(s)})|]\Big\} ds \leq$$

$$\leq M_1 \frac{2}{\rho^2} e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\| + M_2 \frac{2}{\rho} e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\| + N_1\gamma|\tau^{x(t)} - \tau^{\widetilde{x}(t)}| +$$

$$+ N_1 \frac{2}{\rho^2} e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\| + N_2\Gamma_0|\tau^{x(t)} - \tau^{\widetilde{x}(t)}| + N_2 \frac{2}{\rho} e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\| +$$

$$+ N_3\omega|\tau^{x(t)} - \tau^{\widetilde{x}(t)}| + N_3 e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\| + P\int_0^t \Big\{P_1 \frac{2}{\rho^2} e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| +$$

$$+ P_2 \frac{2}{\rho} e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| + P_3 e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| + Q_1\gamma|\tau^{x(s)} - \tau^{\widetilde{x}(s)}| +$$

$$+ Q_1 \frac{2}{\rho^2} e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| + Q_2\Gamma_0|\tau^{x(s)} - \tau^{\widetilde{x}(s)}| + Q_2 \frac{2}{\rho} e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| +$$

$$+ Q_3\omega|\tau^{x(s)} - \tau^{\widetilde{x}(s)}| + Q_3 e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\|\Big\} ds \leq \Big(\frac{2M_1}{\rho^2} + \frac{2M_2}{\rho} + \frac{2N_1}{\rho^2} +$$

$$+ \frac{2N_2}{\rho} + N_3\Big) e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\| + (N_1\gamma + N_2\Gamma_0 + N_3\omega)|\tau^{x(t)} - \tau^{\widetilde{x}(t)}| +$$

$$+ P\int_0^t \Big\{\Big(\frac{2P_1}{\rho^2} + \frac{2P_2}{\rho} + P_3 + \frac{2Q_1}{\rho^2} + \frac{2Q_2}{\rho} + Q_3\Big) e^{\rho s}\|z - \widetilde{z}\| +$$

$$+ (Q_1\gamma + Q_2\Gamma_0 + Q_3\omega)|\tau^{x(s)} - \tau^{\widetilde{x}(s)}|\Big\} ds \leq \varkappa(\rho) e^{\rho t}\|z - \widetilde{z}\|,$$

де $\varkappa(\rho) = X\frac{1}{\rho^3} + Y\frac{1}{\rho^2} + Z\frac{1}{\rho} + V + 1 < 1.$

Отже, $\|\Pi z - \Pi\widetilde{z}\| \leq \varkappa(\rho)\|z - \widetilde{z}\|$. Цим теорему 1 доведено.

3. Крайова задача для системи рівнянь першого порядку

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{x}(t) = f\left\{t, x(t)\, x(\tau^{x(t)}), \dot{x}(\tau^{x(t)}), \int_0^t F(t, s, x(s), \dot{x}(s),\right.$$

$$\left. x(\tau^{x(s)}), \dot{x}(\tau^{x(s)}))\, ds\right\}, \quad t \in I = [0, T], \tag{3.1}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0. \tag{3.2}$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$, а A і B сталі $n \times n$-матриці. Перетворений аргумент $\tau^{x(t)}$ є функцією незалежної змінної t, невідомої функції $x(t)$ та її похідної $\dot{x}(t) : \tau^{x(t)} = \tau(t, x(t), \dot{x}(t))$.

Функції $\tau(t, u_1, u_2) = \tau(t, \xi)$; $F(t, s, u_1, u_2, v_1, v_2) = F(t, s, \eta)$ і $f(t, u_1, v_1, v_2, w) = f(t, \zeta)$ визначені відповідно в областях:

$$Q_\tau = I \times G_1 \times G_2; \quad Q_F = I \times I \times G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2; \; Q_f = I \times G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_3,$$

де

$$G_i = \{\psi : |\psi| \leq g_i\} \quad (i = 1, 2; \quad g_i = \text{const} > 0);$$

$$G_3 = \{\psi : |\psi| \leq F_1 T\} \quad (F_1 = \text{const} > 0)$$

($|\cdot|$ — деяка норма в дійсному n-вимірному просторі R^n).

Припускатимемо, що справджуються такі умови.

1°. Матриця $A + B$ — неособлива.

2°. Існує невід'ємна інтегровна в I функція $H(t)$, така, що $\delta_0 \times \times \int_0^T H(t)\, dt \leq g_1$, де $\delta_0 = 1 + |(A + B)^{-1} B|$ і $\sup_{t \in I} H(t) = \beta \leq g_2$.

3°. В областях Q_F, Q_f і Q_τ функції F, f і τ задовольняють умову Ліпшіца щодо всіх аргументів з константами Φ, N_1, P_1, N_2, P_2; Θ, L_1, L_2, M, W і α, λ, μ відповідно.

4°. В області Q_f функція f задовольняє нерівність

$$\sup_{\zeta \in G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_3} |f(t, \zeta)| \leq H(t).$$

5°. В області Q_τ функція τ задовольняє нерівність $0 \leq \tau(t, \xi) \leq t$.

6°. $C_1 \geqslant 2\sqrt{C_0 C_2}$, де

$$C_0 = \Theta + L_1\beta + W(\Phi T + \widetilde{F}) + L_2\beta(\alpha + \lambda\beta);$$

$$C_1 = 1 - \mu\beta L_2 - M(\alpha + \lambda\beta); \quad C_2 = \mu M,$$

а

$$\widetilde{F} = \sup_{(t, s, \eta) \in Q_F} |F(t, s, \eta)| \quad (\widetilde{F} \leq F_1).$$

7° $Z < 1$, де $Z = L_2\beta\mu + M\omega\mu + M$, а $\omega = \dfrac{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2}}{2C_2}$.

Розглянемо простір $C^n(I)$ неперервних n-вимірних функцій $z : I \xrightarrow{z} R^n$ з метрикою, породженою нормою

$$\|z\| = \sup\{|z(t)|\, e^{-\rho t} : t \in I\},$$

де

$$\rho > \rho_1 = \frac{2X}{-Y + \sqrt{Y^2 + 4X(1 - Z)}},$$

а

$$X = 2W(N_1 + N_2\beta\lambda + N_2 + P_2\omega\lambda);$$

$$Y = 2(L_1 + L_2\beta\lambda + L_2 + M\omega\lambda) + W(P_1 + N_2\mu\beta + P_2\omega\mu + P_2).$$

Позначимо через Ω множину всіх функцій $z \in C^n(I)$, що задовольняють умови

$$|z(t)| \leq H(t), \quad t \in I; \tag{3.3}$$

$$|z(t) - z(\bar{t})| \leq \omega |t - \bar{t}|, \quad t, \bar{t} \in I. \tag{3.4}$$

Розв'язком задачі (3.1), (3.2) називатимемо таку визначену і диференційовну на I функцію $x(t)$, що задовольняє рівняння (3.1) і крайову умову (3.2), похідна якої належить множині Ω.

2. Існування і єдиність розв'язку.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* $1° - 7°$ *і* $C < e^{-\rho T}$, *де* $C = |(A+B)^{-1}B|$. *Тоді крайова задача* (3.1), (3.2) *має єдиний розв'язок.*

Доведення теореми 2 проводиться за схемою доведення теореми 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Bielecki A. Une remarque sur la méthode de Banach—Cacciopoli—Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires.— Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, 1956, Cl. III — vol. IV, № 5.
2. Константинов М. М. Существование и единственность решений краевых задач для дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа.— Math. Balk. (Beograd), 1973, 3.

Болгарія

Надійшла до редакції 5.VIII 1974 р., після переробки — 24.VII 1975 р.