УДК 517.944

Г. П. Хома

Усереднення гіперболічних систем першого порядку

Розглянемо в області $G=\{(x, t): -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty\}$ гіперболічну систему першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} = \varepsilon F_i(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_i(x, 0) = g_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \ -\infty < x < \infty), \tag{2}$$

де $\lambda_i(x, t)$ і $g_i(x)$ — відомі дійсні функції, ε — малий параметр.

Нехай рівномірно щодо $-\infty < x < \infty$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in D \subset R_m$ існує границя виду

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_i(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m)\, dt = F_i^0(x, u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Тоді систему

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x} = \varepsilon F_i^0(x, v_1, v_2, \ldots, v_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

будемо називати усередненою системою системи (1).

З теорем про неперервну залежність від параметру розв'язку гіперболічної системи першого порядку [1 — 3] випливає принцип усереднення для стандартних систем виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \varepsilon\lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i}{\partial x} = \varepsilon F_i(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

У цій роботі доведено принцип усереднення М. М. Боголюбова — Ю. О. Митропольського [4] для систем виду (1).

Теорема (про усереднення). *Нехай для системи* (1) *з початковими умовами* (2) *виконуються умови:*

1) *функції* $F_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_m)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *визначені для всіх значень аргументів* $-\infty < x < \infty$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in D \subset R_m$, *де* D — *обмежена і замкнена область* R_m *і задовольняють умови:*

а) *функції* $F_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_m)$ *обмежені, неперервні щодо* t *і задовольняють умову Ліпшіца по* x *і* $u_1, u_2, \dots, u_m$ *із сталою, яка не залежить від* t;

б) *рівномірно щодо* x, u *існує границя* (3);

2) *функції* $\lambda_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *неперервні, причому забезпечують єдиність розв'язку* $x = x_i(t; x_0, t_0)$ *в сторону спадання* t *початкової задачі* $(x(t_0) = x_0)$ *для рівняння характеристик* $\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$;

3) *виконані умови існування класичного розв'язку задачі Коші* (1), (2);

4) *для усередненої системи* (4) *існує єдиний розв'язок, який визначений в області* $G_{\frac{T}{\varepsilon}}$, *де* $G_{\frac{T}{\varepsilon}}$ *означає замкнену обмежену область на півплощині* G [див. 5], *і задовольняє умову*

$$v_i(x, 0) = g_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{5}$$

Тоді $\forall \eta > 0\ \forall T > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$ *таке, що розв'язок* $u_i(x, t)$ *задачі Коші* (1), (2) *і розв'язок* $v_i(x, t)$ *задачі Коші* (4), (5) *задовольняють нерівність*

$$|u_i(x, t) - v_i(x, t)| < \eta \,(\forall (x, t) \in G_{\frac{T}{\varepsilon}} \text{ и } \forall \varepsilon < \varepsilon_0).$$

Доведення. Перейдемо від систем (1) і (4) до систем інтегральних рівнянь [5]:

$$u_i(x, t) = g_i(x_i(0; x, t)) + \varepsilon \int_0^t F_i(x_i(\tau; x, t), \tau, u_1(x_i, \tau), \dots, u_m(x_i, \tau))\, d\tau$$

$$(i = 1, 2, \dots, m); \tag{6}$$

$$v_i(x, t) = g_i(x_i(0; x, t)) + \varepsilon \int_0^t F_i^0(x_i(\tau; x, t), v_1(x_i, \tau), \dots, v_m(x_i, \tau))\, d\tau$$

$$(i = 1, 2, \dots, m). \tag{7}$$

Зафіксуємо t і позначимо

$$V(t) = \max_{j; x; \tau \leqslant t} |u_j(x, \tau) - v_j(x, \tau)|. \tag{8}$$

Тоді, використовуючи методику доведення відповідної теореми про усереднення для системи звичайних диференціальних рівнянь [6, 7], із систем (6) і (7) одержуємо

$$U(t) < \eta \left(\forall t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \text{ и } \forall \varepsilon < \varepsilon_0\right).$$

Звідси, на основі позначення (8), випливає вірність теореми. Теорему доведено.

Зауваження 1. Як відомо, існування рівномірного середнього (3) суттєво використовується при доведенні відповідних теорем про усереднення. У випадку порушення цієї умови А. Н. Філатовим [7] вперше доведена так звана теорема про частинне усереднення для систем звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічна теорема може бути доведена для гіперболічних систем в частинних похідних виду (1).

Зауваження 2. Аналогічно доводиться теорема про усереднення для гіперболічних систем у випадку мішаної задачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике, К., «Наук. думка», 1971, 440 с.
2. Митропольский Ю. А., Хома Г. П. О принципе усреднения для гиперболических уравнений вдоль характеристик.— УМЖ, 1970, **22**, № 5, с. 600—610.
3. Хома Г. П. Про неперервну залежність розв'язку гіперболічної системи від параметра.— Допов. АН УРСР, сер. А, 1970, № 7.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., «Наука», 1974, 501 с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными, М., Физматгиз, 1961.
6. Хапаев М. М. О методе усреднения в некоторых задачах, связанных с усреднением.— Дифференц. уравнения, 1966, **2**, № 5.
7. Филатов А. Н. О частичном усреднении в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 6.

Тернопільський педагогічний інститут

Надійшла до редакції 3.III 1975 р., після переробки—25.XII 1975 р.