УДК 517.946

С. А. Кривошея

О построении приближенных решений одной смешанной задачи для квазиволнового уравнения

В статье рассматривается вопрос о построении на основе асимптотического метода Крылова — Боголюбова — Митропольского приближенных решений смешанной задачи для квазиволнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu f(u) \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

с нелинейными краевыми условиями в случае, когда в краевое условие входит производная по времени искомой функции вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\eta(u)\frac{\partial u}{\partial t} \text{ при } x = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\omega(u)\frac{\partial u}{\partial t} \text{ при } x = 1 \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{3}$$

В (1)—(3) $f(u)$, $\eta(u)$, $\omega(u)$—целые рациональные функции относительно u; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — достаточно гладкие на отрезке $[0, 1]$ функции, $\beta = \mathrm{const} \neq 0$, μ — малый параметр.

Смешанная задача с нелинейными краевыми условиями для квазиволнового уравнения возникает при исследовании колебательных процессов во многих системах с распределенными параметрами [1, 2]. Так, например, задачами вида (1) — (3) описываются колебательные процессы в длинных линиях [3].

В п. 1 доказана теорема о полноте системы собственных функций невозмущенной задачи, описываемой волновым уравнением и линейными однородными краевыми условиями, соответственно получающимися при $\mu=0$ из уравнения (1) и краевых условий (2). В п. 2 построено первое и первое улучшенное приближения решения задачи (1) — (3). В качестве примера рассмотрена задача А. А. Витта.

1. Рассмотрим невозмущенную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0,$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \text{ при } x = 1. \tag{5}$$

Волновое уравнение (4) при заданных линейных однородных краевых условиях (5) допускает применение метода Фурье, согласно которому общее решение получаем в виде

$$u_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x)\cos(\lambda_n t + \delta_n), \tag{6}$$

где $X_n(x) \equiv \cos\lambda_n x$ — собственные функции задачи с краевыми условиями, зависящими от собственного числа λ:

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$
$$X'(0) = X'(1) - \beta\lambda^2 X(1) = 0, \tag{*}$$

$\lambda_0 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — корни частотного уравнения

$$\operatorname{tg}\lambda = -\beta\lambda, \tag{7}$$

a_n, δ_n — произвольные постоянные.

Теорема. *Система собственных функций* $\{X_i\}$ *задачи* (*) *полна в пространстве* $L^2_{(0,1)}$.

Доказательство. При доказательстве используем методику работы [4]. Вместе с $(*)$ рассмотрим задачу

$$Y'' + \nu^2 Y = 0, \qquad Y'(0) = Y(1) = 0. \tag{8}$$

Система собственных функций $Y_j(x) = \sqrt{2}\cos \nu_j x \left(\nu_j = \frac{\pi}{2}(2j-1),\ j = 1, 2, \ldots\right)$ полна в $L^2_{(0,1)}$ как система собственных функций задачи $(*)$ с краевыми условиями $X'(0) = X(1) = 0$. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что любая функция Y_j может быть аппроксимирована с произвольной точностью линейными комбинациями функций X_i.

В силу полноты и ортонормальности системы $\{Y_j\}$ имеем

$$X_i = \sum_{j=1}^{N} (X_i, Y_j) Y_j + P_i^{(N)}, \tag{9}$$

где $P_i^{(N)} = \sum\limits_{l=N+1}^{\infty} (X_i, Y_l) Y_l$, а скалярное произведение (X_i, Y_j) определяется по формуле $(X_i, Y_j) = \dfrac{X_i'(1)\, Y_j'(1)}{(-\beta)\lambda_i^2 (\nu_j^2 - \lambda_i^2)}$.

Вычислим определитель $D^{(N)} = \det \| (X_i, Y_j) \|_1^N$:

$$D^{(N)} = \frac{1}{\beta^N} \prod_{i=1}^{N} \frac{X_i'(1)\, Y_i'(1)}{\lambda_i^2} \; \frac{\prod\limits_{j>l}^{N} (\lambda_j^2 - \lambda_l^2)(\nu_l^2 - \nu_j^2)}{\prod\limits_{j,l=1}^{N} (\lambda_j^2 - \nu_l^2)}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $D^{(N)} \neq 0$. Поэтому, обозначая через $\| c_{ij}^{(N)} \|_1^N$ матрицу, обратную к матрице $\|(X_i, Y_j)\|_1^N$, из (9) получим

$$Y_j = \sum_{i=1}^{N} c_{ji}^{(N)} X_i - \sum_{i=1}^{N} c_{ji}^{(N)} P_i^{(N)}. \tag{11}$$

Остается показать, что $\left\| \sum\limits_{i=1}^{N} c_{ji}^{(N)} P_i^{(N)} \right\| \to 0$ при $N \to \infty$.

Нетрудно вычислить элементы $c_{ji}^{(N)}$

$$| c_{ji}^{(N)} | = \frac{| Y_i'(1) |}{| Y_j'(1)\, (X_i, Y_i) |} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^{N} \frac{| \lambda_i^2 - \nu_l^2 |\, | \nu_j^2 - \lambda_l^2 |\, | \lambda_i^2 - \nu_j^2 |\, | \nu_j^2 - \lambda_j^2 |}{| \lambda_i^2 - \lambda_l^2 |\, | \nu_j^2 - \nu_l^2 |\, | \lambda_i^2 - \lambda_j^2 |\, | \nu_j^2 - \nu_i^2 |} \ (i \neq j), \tag{12}$$

$$| c_{jj}^{(N)} | = \frac{1}{|(X_j, Y_j)|} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N} \frac{| \lambda_j^2 - \nu_l^2 |\, | \lambda_l^2 - \nu_j^2 |}{| \lambda_j^2 - \lambda_l^2 |\, | \nu_j^2 - \nu_l^2 |}. \tag{13}$$

Оценим отдельные сомножители в (12) и (13). Из уравнения (7) получим $\operatorname{tg}(\nu_l - \lambda_l) = -\dfrac{1}{\beta\lambda_l}$, откуда $|\nu_l - \lambda_l| < \dfrac{C_1}{\lambda_l}$ и $|\nu_l^2 - \lambda_l^2| < C_2$ (C_1, C_2 — постоянные). Поэтому $| (X_i, Y_i) | > C_3 = \mathrm{const} > 0$, $| Y_i'(1) | < Ki$, где через K обозначена константа, не зависящая от i и от N. (Буквой K будем обозначать разные константы.)

Далее ($l \neq i, j$):

$$\prod_{l=1}^{N} \frac{|\nu_j^2 - \lambda_l^2|}{|\nu_j^2 - \nu_l^2|} < K, \quad \prod_{l=1}^{N} \frac{|\lambda_i^2 - \nu_l^2|}{|\lambda_i^2 - \lambda_l^2|} \leqslant \prod_{l=1}^{N} \left(1 + \frac{|\nu_l^2 - \lambda_l^2|}{|\lambda_i^2 - \nu_l^2|}\right) <$$

$$< \prod_{l=1}^{N} \left(1 + \frac{C_4}{|l^2 - i^2|}\right) < \exp \sum_{l=1}^{N} \frac{C_4}{|l^2 - i^2|} < K \left(\frac{N+1-i}{N+1+i}\right)^{\frac{C_5}{i}} < K$$

(C_4, C_5 — положительные постоянные),

$$\frac{|\lambda_i^2 - \nu_j^2| \, |\nu_j^2 - \lambda_j^2|}{|\lambda_i^2 - \lambda_j^2| \, |\nu_j^2 - \nu_i^2|} < \frac{K}{i^2}.$$

Окончательно получаем $|c_{ji}^{(N)}| < \frac{K}{i}$ $(i \neq j)$. Аналогично $|c_{jj}^{(N)}| < \frac{K}{j}$.

Оценим по норме функцию $P_i^{(N)}$:

$$\| P_i^{(N)} \| = \sqrt{\sum_{l=N+1}^{\infty} (X_i, Y_l)^2} \leqslant \frac{K}{i} \sqrt{\sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{l^2}{(l^2 - i^2)^2}} <$$

$$< \frac{K}{i} \sqrt{\int_{N+1}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 - i^2)^2}} = K i^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\int_{\frac{N+1}{i}}^{\infty} \frac{u^2 du}{(u^2 - 1)^2}} = K i^{-\frac{3}{2}} S\left(\frac{N+1}{i}\right),$$

где $S\left(\frac{N+1}{i}\right) = \sqrt{\int_{\frac{N+1}{i}}^{\infty} \frac{u^2 du}{(u^2-1)^2}}$, причем функция $s(z)$ обладает свойствами: $s(z) < K z^{-\frac{1}{2}}$ при $z \to \infty$, $s(z) < K(z-1)^{-\frac{1}{2}}$ при $z \to 1 + 0$.

Поэтому везде $s(z) < K(z-1)^{-\frac{1}{2}}$.

Теперь оценим второе слагаемое в (11)

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} c_{ji}^{(N)} P_i^{(N)} \right\| \leqslant K \sum_{i=1}^{N} i^{-\frac{5}{2}} S\left(\frac{N+1}{i}\right) < K \sum_{i=1}^{N} i^{-\frac{5}{2}} \frac{i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N+1-i}} <$$

$$< K \sum_{i=1}^{N} i^{-\frac{5}{2}} \frac{i}{\sqrt{N}} \leqslant \frac{K}{\sqrt{N}} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Тем самым теорема доказана. Из доказательства в частности следует, что полнота имеет место и без учета функции $X_0 \equiv 1$.

Отметим некоторые свойства собственных функций задачи (*). Функции X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют соотношениям

$$\| X_i \|^2 = \frac{1}{2}(1 - \beta X_i^2(1)), \quad (X_i, X_j) = -\beta X_i(1) X_j(1) \quad (i \neq j). \tag{14}$$

Из (14) следует, что система $\{X_i\}$ не является ортогональной на $[0,1]$. Нетрудно проверить, однако, что

$$(X_i, X_j^*) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$X_j^*(x) \equiv \gamma_j [X_j(x) - X_j(1)], \quad \gamma_j = \frac{2}{1 + \beta X_j^2(1)}. \tag{16}$$

Используя (15), для произвольной функции $f(x) \in L^2_{(0,1)}$ получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i X_i(x), \quad f_i = \int_0^1 f(x) X_i^*(x)\, dx. \tag{17}$$

2. Предположим, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (3) равны:

$$\varphi(x) = pX_1(x) + \mu\varphi_1(x), \quad \psi(x) = qX_1(x) + \mu\psi_1(x), \quad p, q = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Тогда решение невозмущенной задачи имеет вид

$$u_0(x, t) = a_1 X_1(x) \cos(\lambda_1 t + \delta_1) \quad \left(a_1 = \sqrt{p^2 + \frac{q^2}{\lambda_1^2}},\ \delta_1 = -\operatorname{arctg}\frac{q}{p\lambda_1}\right). \tag{19}$$

Решение возмущенной задачи ищем в виде разложения [1]

$$u(x, t) = aX_1(x)\cos\psi + \mu u_1(x, a, \psi) + \ldots, \ (u_i(x, a, \psi + 2\pi) \equiv u_i(x, a, \psi)), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \mu A_1(a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda_1 + \mu B_1(a) + \ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда для определения функции $u_1(x, a, \psi)$ получаем уравнение

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 2\lambda_1 X_1(x) [A_1(a)\sin\psi + aB_1(a)\cos\psi] - f_0(x, a, \psi), \tag{22}$$

краевые

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \eta(a, \psi), \quad x = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta\lambda_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} &= \omega(a, \psi) + 2\beta\lambda_1 X_1(1)[A_1(a)\sin\psi + aB_1(a)\cos\psi], \quad x = 1, \end{aligned} \tag{23}$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} u_1(x, a_1, \delta_1) &= \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \psi}(x, a_1, \delta_1) &= \frac{1}{\lambda_1}\left\{\psi_1(x) - X_1(x)\left[\frac{p}{a_1} A_1(a_1) + \frac{q}{\lambda_1} B_1(a_1)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

В (23) и (24) $f_0(x, a, \psi) \equiv -a\lambda_1 X_1(x) f(aX_1(x)\cos\psi)\sin\psi$, $\eta(a, \psi) \equiv -a\lambda_1\eta(a\cos\psi)\sin\psi$, $\omega(a, \psi) \equiv -a\lambda_1 X_1(1)\,\omega(aX_1(1)\cos\psi)\sin\psi$.

Общее решение задачи (22) — (23) можно представить в виде

$$u_1(x, a, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i X_i(x) \cos\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\psi + \alpha_i\right) + w(x, a, \psi), \tag{25}$$

где $w(x, a, \psi)$ — частное решение неоднородной задачи.

Функцию $w(x, a, \psi)$ ищем в виде

$$w(x, a, \psi), = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(a, \psi) X_i(x) + \eta(a, \psi) x. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (22) и (23), получим

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \psi^2} = F_0(a, \psi), \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_1^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \psi^2} + \lambda_1^2 w_i \right] [X_i(x) - X_i(1)] =$$

$$= 2\lambda_1 [X_1(x) - X_1(1)] [A_1(a) \sin \psi + aB_1(a) \cos \psi] + F(x, a, \psi), \tag{28}$$

где

$$F_0(a, \psi) = \frac{1}{\beta\lambda_1^2} \Big\{ \omega(a, \psi) - \eta(a, \psi) - \beta\lambda_1^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \psi^2} -$$

$$- \beta \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_1^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \psi^2} + \lambda_i^2 w_i \right] X_i(1) + 2\beta\lambda_1 X_1(1) [A_1(a) \sin \psi + aB_1(a) \cos \psi] \Big\},$$

$$F(x, a, \psi) = - f_0(x, a, \psi) - \lambda_1^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \psi^2} (x - 1) - \frac{1}{\beta} [\omega(a, \psi) - \eta(a, \psi)].$$

Умножая (28) на $\gamma_i X_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и интегрируя по отрезку $[0, 1]$, получим (в силу (15)) следующие уравнения относительно $w_i(a, \psi)$ $(i = 1, 2, \ldots)$:

$$\lambda_1^2 \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial \psi^2} + w_1 \right] = 2\lambda_1 [A_1(a) \sin \psi + aB_1(a) \cos \psi] + F_1(a, \psi), \tag{29}$$

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \psi^2} + \lambda_i^2 w_i = F_i(a, \psi) \quad (i = 2, 3, \ldots), \tag{30}$$

где $F_i(a, \psi) = \gamma_i \int_0^1 F(x, a, \psi) X_i(x)\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots).$

Определяя из уравнений (29), (30) частные 2π-периодические по ψ решения, получаем

$$A_1(a) = \frac{\gamma_1}{2\lambda_1 \pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi \int_0^1 \Big\{ f_0(x, a, \psi) + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \psi^2} (x - 1) +$$

$$+ \frac{1}{\beta} [\omega(a, \psi) - \eta(a, \psi)] \Big\} X_1(x)\, dx d\psi, \quad B_1(a) = 0, \tag{31}$$

$$w_1(a, \psi) = \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{m=2}^{N} \frac{h_m^{(1)}(a) \sin m\psi}{1 - m^2}, \quad w_i(a, \psi) = \sum_{m=1}^{N} \frac{h_m^{(i)}(a) \sin m\psi}{\lambda_i^2 - m^2 \lambda_1^2} \tag{32}$$

$$(i = 2, 3, \ldots),$$

где $h_m^{(i)}(a)$ — коэффициенты Фурье функций $F_i(a, \psi)$.

Очевидно, формулы (32) имеют смысл только тогда, когда $\lambda_i^2 - m^2 \lambda_1^2 \neq 0$, т. е. при обязательном условии, что в рассматриваемой колебательной системе отсутствуют внутренние резонансы.

Обратимся к уравнению (27). Как следует из (29) и (30), функцию $F_0(a, \psi)$ можно записать в виде

$$F_0(a, \psi) = \frac{1}{\beta\lambda_1^2}\left[\omega(a, \psi) - \eta(a, \psi) - \beta\lambda_1^2 \frac{\partial^2\eta}{\partial\psi^2} - \beta\sum_{i=1}^{\infty} F_i(a, \psi) X_i(1)\right], \quad (33)$$

где $F_i(a, \psi)$ — известные функции. Возможность определения из (27) 2π-периодической по ψ функции $w_0(a, \psi)$ следует теперь из того, что $\int\limits_0^{2\pi} F_0(a, \psi)\, d\psi = 0$.

Используя начальные условия (24), нетрудно определить произвольные постоянные b_i, α_i (см. [2]). Тем самым $u_1(x, a, \psi)$ построена, что дает возможность записать первое улучшенное приближение решения рассматриваемой задачи.

В заключение рассмотрим задачу А. А. Витта [3]. А. А. Витт изучал установление автоколебаний в распределенной автоколебательной системе, описывающейся задачей

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial t},\\ \frac{\partial u}{\partial x} = -2\mu\Delta(1 - u^2)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -2\mu\beta\frac{\partial u}{\partial t}, \quad x = 1\end{gathered} \quad (34)$$

(μ — малый параметр, β, Δ — постоянные, $\Delta > 0$, $\beta \neq 0$, $1-2\mu\Delta > 0$). Существование, единственность и корректность решения задачи (34) доказано в [5]. Построим решение задачи (34) в первом приближении. В силу (31) получим

$$u_I(x, t) = a\cos\lambda_1 x\cos\psi,$$

$$\frac{da}{dt} = a\,\frac{2\Delta\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)(\beta^2\lambda_1^2 + 1) - (\beta^2\lambda_1^2 + \beta + 1)}{\beta^2\lambda_1^2 + \beta + 1}\,\mu, \quad \frac{d\psi}{dt} = \lambda_1. \quad (35)$$

Из (35) в частности следуют условия, полученные А. А. Виттом:

самовозбуждения колебаний

$$\frac{2\Delta(\beta^2\lambda_1^2 + 1)}{\beta^2\lambda_1^2 + \beta + 1} > 1,$$

устойчивости стационарных амплитуд

$$2\Delta\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) < \frac{\beta^2\lambda_1^2 + \beta + 1}{\beta^2\lambda_1^2 + 1},$$

где стационарные амплитуды определяются из уравнения

$$1 - \frac{a^2}{4} = \frac{\beta^2\lambda_1^2 + \beta + 1}{2\Delta(\beta^2\lambda_1^2 + 1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. К., Изд. Института математики АН УССР, 1968, 414 с.
2. Мосеенков Б. И. О построении формальных решений для квазиволнового уравнения с нелинейными краевыми условиями и о возможности применения асимптотических методов Крылова—Боголюбова для исследования одночастотных колебаний. К., Изд. Института математики АН УССР, 1964, 47 с.
3. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы.— ЖТФ, 1934, **4**, вып. 1, с. 144—157.
4. Дикий Л. А. О краевых условиях, зависящих от собственного числа.— УМН, 1960, **15**, вып. 1(91), с. 195—198.
5. Гольдберг В. Н. О существовании, единственности и корректности решения одной нелинейной задачи.— ДАН СССР, 1959, **124**, № 3, с. 513—516.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию 23.XII 1975 г.