УДК 517.947+532.72

В. И. Лаврик

О двух краевых задачах неустановившейся конвективной диффузии в случае фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью

Двумерный неустановившийся процесс распространения растворимого вещества при фильтрации грунтовых вод, как известно [1], описывается следующими уравнениями:

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-v_x\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\frac{dc}{dy}=\sigma\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \quad \vec{v}=\operatorname{grad}\varphi\,(\varphi=-\varkappa h), \tag{2}$$

где D — коэффициент конвективной диффузии, $c\,(x,\ y,\ t)$ — концентрация дифундирующего в области фильтрации вещества, v_x и v_y — составляющие вектора скорости фильтрации $\vec{v}$, σ — пористость грунта, $\varkappa$ — коэффициент фильтрации грунта, h — пьезометрический напор в произвольной точке области фильтрации $z=x+iy$ (рисунок, *а*).

Область комплексного потенциала ω для рассматриваемого случая установившейся фильтрации из открытого водоема AB к водоприемнику CD при наличии водоупора E_1F_1 изображается в виде прямоугольника $ABCDEF$ (рисунок, *б*). Поэтому, применяя метод конформных отображений [2], найдем характеристическую функцию течения в виде [2, 3]

$$\bar{z}=i\bar{\omega}+\frac{1+2\bar{T}}{2\pi}\ln\frac{a_1+b_1+(a_1-b_1+2a_1b_1)\,m+[(a_1+b_1)\,m^2+(a_1-b_1+2a_1b_1)\,m]\operatorname{sn}(2\bar{\omega}K-K,m)}{a_1+b_1+(a_1-b_1)\,m+[(a_1+b_1)m^2+(a_1-b_1)\,m]\operatorname{sn}(2\bar{\omega}K-K,m)}, \tag{3}$$

где

$$a_1=1-e^{-\frac{2\pi(l_1-q)}{H+2T}}, \quad b_1=e^{\frac{2\pi(L+l_2+q)}{H+2T}}-1, \tag{4}$$

$$\bar{z}=\frac{z}{H}, \quad \bar{\omega}=\frac{\omega}{H}, \quad \bar{T}=\frac{T}{H}, \quad \bar{q}=\frac{Q}{\varkappa}, \quad \bar{q}=\frac{q}{H}, \tag{5}$$

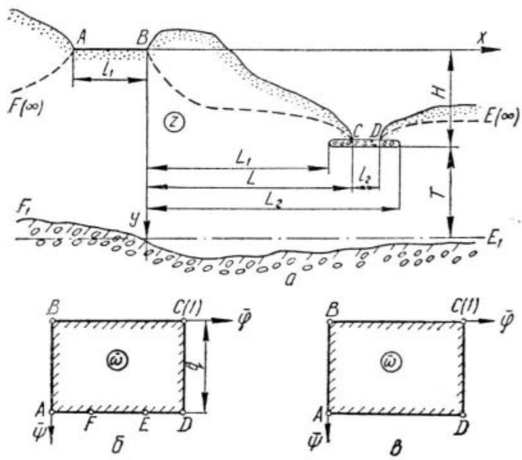
а модуль m полного эллиптического интеграла первого рода $K = K(m)$ определяется из соотношения $K(\sqrt{1-m^2}) = 2K(m)\bar{q}$. Воспользовавшись (3), легко записать уравнения кривых депрессии BC, AF и ED, а также определить неизвестные фильтрационные параметры.

Следуя [4], преобразуем уравнение (1) к новым независимым переменным $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ — координатам точек области приведенного комплексного потенциала $\bar{\omega}$. В результате получим

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \bar{\varphi}^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \bar{\psi}^2} - \frac{\varkappa H}{D}\frac{\partial c}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\sigma(\varkappa H)^2}{Dv^2}\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{6}$$

которое после подстановки

$$c(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, t) = u(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, t)\, e^{\bar{\varphi}\sqrt{2\tau}}, \quad 2\tau = \left(\frac{\varkappa H}{2D}\right)^2, \tag{7}$$



преобразуется в уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\varphi}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\psi}^2} - 2\tau u = \frac{\partial u}{\partial \bar{t}},$$

$$\bar{t} = \frac{Dv^2}{\sigma(\varkappa H)^2}\, t, \tag{8}$$

где в качестве значения скорости фильтрации v берем некоторое ее среднее значение: $v \approx v_{\text{ср}}$.

Для окончательного решения поставленной задачи требуется найти функцию $u(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{t})$, удовлетворяющую в прямоугольнике $\bar{\omega}$ уравнению (8) и соответствующим дополнительным условиям. Целесообразно рассмотреть две краевые задачи для уравнения (8).

I. При фильтрации из водоема AB в водоприемник CD загрязненных или минирализованных вод возникает краевая задача:

в прямоугольнике $\bar{\omega}$ найти решение уравнения (8), удовлетворяющее следующим краевым и начальным условиям:

$$u(0, \bar{\psi}, \bar{t}) = c_1, \quad u(1, \bar{\psi}, \bar{t}) = c_2 e^{-\sqrt{2\tau}} = \alpha; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{\psi}}\right|_{\bar{\psi}=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \bar{\psi}}\right|_{\bar{\psi}=\bar{q}} = 0, \tag{10}$$

$$u(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, 0) = c_0 e^{-\bar{\varphi}\sqrt{2\tau}} = \beta_0(\bar{\varphi}). \tag{11}$$

II. Если в грунте на некоторой глубине T залегает пласт соли, то в этом случае возникает задача об определении концентрации растворимой в воде соли при фильтрации пресной или соленой воды из водоема AB в водоприемник CD. Соответствующая краевая задача формулируется так:

в прямоугольнике $\overline{\omega}$ найти решение уравнения (8), удовлетворяющее следующим краевым и начальным условиям:

$$u(0, \overline{\psi}, \overline{t}) = c_1, \quad u(1, \overline{\psi}, \overline{t}) = c_2 e^{-\sqrt{2\tau}} = \alpha, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}}\right|_{BC} = \left.\frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}}\right|_{AF} = \left.\frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}}\right|_{DE} = 0, \quad u|_{EF} = c_H e^{-\overline{\varphi}\sqrt{2\tau}} = \beta(\overline{\varphi}), \tag{13}$$

$$u(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, 0) = c_0 e^{-\overline{\varphi}\sqrt{2\tau}} = \beta_0(\overline{\varphi}), \tag{14}$$

причем через c_1, c_2, c_H и c_0 обозначена концентрация вещества соответственно в водоеме AB, в водоприемнике CD, на границе с пластом соли E_1F_1 и в начальный момент времени в рассматриваемой области фильтрации z.

Отметим, что в случае бесконечной ширины водоема AB решение фильтрационной задачи получается из (3) — (5) в результате предельного перехода при $a_1 \to 1$, в случае бесконечной ширины водоприемника CD решение фильтрационной задачи получается из (3) — (5) в результате предельного перехода при $b_1 \to \infty$ и в случае бесконечной ширины обоих водоемов — из (3) — (5) в результате предельного перехода при $a_1 \to 1$ и $b_1 \to \infty$. Поэтому для второй краевой задачи в первых двух частных случаях фильтрации граница AD области комплексного потенциала ω (см. рисунок, *б*) будет разбиваться точкой E или F на два участка с различными граничными условиями вида (13), а в последнем случае на границе AD области комплексного потенциала ω (рисунок, *в*) будет выполняться только одно условие, а именно:

$$u|_{AD} = c_H e^{-\overline{\varphi}\sqrt{2\tau}} = \beta(\overline{\varphi}). \tag{15}$$

Для первой краевой задачи во всех четырех случаях фильтрации на стороне AD прямоугольника $\overline{\omega}$ будет выполняться только одно краевое условие вида (10). Перейдем к нахождению решений сформулированных выше краевых задач.

Решение краевой задачи (8), (9) — (11) будем искать в виде

$$u(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \overline{t}) = u_0(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) + v(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, \overline{t}). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (8) и (9) — (11), видим, что данная краевая задача распадается на две следующие:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \overline{\varphi}^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \overline{\psi}^2} - 2\tau u_0 = 0, \tag{17}$$

$$u_0(0, \overline{\psi}) = c_1, \quad u(1, \overline{\psi}) = c_2 e^{-\sqrt{2\tau}} = \alpha, \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}}\right|_{\overline{\psi}=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}}\right|_{\overline{\psi}=\overline{q}} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \overline{\varphi}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \overline{\psi}^2} - 2\tau v = \frac{\partial v}{\partial \overline{t}}, \tag{20}$$

$$v(0, \overline{\psi}, \overline{t}) = v(1, \overline{\psi}, \overline{t}) = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \overline{\psi}}\right|_{\overline{\psi}=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial \overline{\psi}}\right|_{\overline{\psi}=\overline{q}} = 0, \tag{21}$$

$$v(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, 0) = \beta_0(\overline{\varphi}) - u_0(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \gamma(\overline{\varphi}, \overline{\psi}). \tag{22}$$

Используя метод Фурье [5], найдем решения, удовлетворяющие уравнению (17) и краевым условиям (18), а именно (установившийся процесс):

$$(u_0)_n = \frac{c_1 \operatorname{sh}\sqrt{2\tau}\,(1-\bar{\varphi}) + \alpha \operatorname{sh}\sqrt{2\tau}\,\bar{\varphi}}{\operatorname{sh}\sqrt{2\tau}} + \tag{23}$$
$$+ \sin n\pi\bar{\varphi}\,(a_n \operatorname{ch} \nu_n\bar{\psi} + b_n \operatorname{sh} \nu_n\bar{\psi}), \quad \nu_n = \sqrt{(n\pi)^2 + 2\tau}.$$

Легко видеть, что решения, удовлетворяющие еще и условию (19), имеют следующий вид:

$$(u_0)_n = u_0 = \frac{c_1 \operatorname{sh}\sqrt{2\tau}\,(1-\bar{\varphi}) + \alpha \operatorname{sh}\sqrt{2\tau}\,\bar{\varphi}}{\operatorname{sh}\sqrt{2\tau}}, \tag{24}$$

т. е. искомое решение не зависит от переменной $\bar{\psi}$.

Аналогично можно найти частные решения уравнения (20), удовлетворяющие краевым условиям (21), которые имеют вид

$$v_{n,m} = c_{n,m} \sin n\pi\bar{\varphi} \cos \frac{m\pi}{\bar{q}}\,\bar{\psi} e^{-\left[(n\pi^2) + \left(\frac{m\pi}{\bar{q}}\right)^2 + 2\tau\right]\bar{t}}. \tag{25}$$

Следовательно, на основании обобщенного принципа суперпозиции [5] решение уравнения (8) при дополнительных условиях (9) — (11) имеет вид

$$u(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{t}) = \frac{c_1 \operatorname{sh}\sqrt{2\tau}\,(1-\bar{\varphi}) + \alpha \operatorname{sh}\sqrt{2\tau}\,\bar{\varphi}}{\operatorname{sh}\sqrt{2\tau}} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,m} e^{-\left[(n\pi)^2 + \left(\frac{m\pi}{\bar{q}}\right)^2 + 2\tau\right]\bar{t}} \sin n\pi\bar{\varphi} \cos \frac{m\pi}{\bar{q}}\,\bar{\psi}, \tag{26}$$

где коэффициенты $c_{n,m}$ определяются на основании условия (22) из следующего равенства:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,m} \sin n\pi\bar{\varphi} \cos \frac{m\pi}{\bar{q}}\,\bar{\psi} = \gamma(\bar{\varphi}, \bar{\psi}). \tag{27}$$

Заметим, что так как решение u_0 не зависит от $\bar{\psi}$, то в силу (22) функция γ также не будет зависеть от $\bar{\psi}$, т. е. $\gamma = \gamma_0(\bar{\varphi})$. Поэтому равенство (27) перепишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi\bar{\varphi} = \gamma_0(\bar{\varphi}), \tag{28}$$

где

$$c_n = 2\int_0^1 [\beta_0(\bar{\varphi}) - u_0(\bar{\varphi})] \sin n\pi\bar{\varphi}\, d\bar{\varphi} \tag{29}$$

являются коэффициентами Фурье [5].

Таким образом, решение краевой задачи (8) — (11) запишется в следующем виде:

$$u(\bar{\varphi}, \bar{t}) = u_0(\bar{\varphi}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-[(n\pi)^2+2\tau]\bar{t}} \sin n\pi\bar{\varphi}, \tag{30}$$

где коэффициенты Фурье c_n определяются по формуле (29), т. е. искомое решение не зависит от переменной $\bar{\psi}$. Решение соответствующей краевой задачи для случая установившейся диффузии получается из (30) в результате предельного перехода при $\bar{t} \to \infty$. Это решение записывается в виде (24). Функция (30) действительно является решением краевой задачи (8) — (11), так как можно показать, что ряд (30), который запишем в виде $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и его производные $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial \bar{t}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial \bar{\varphi}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial \bar{\varphi}^2}$ при всех $\bar{t} \geqslant \bar{t}_0 > 0$ ($\bar{t}_0$ — любое число) сходятся равномерно.

Исследования и решения краевой задачи (8), (12)—(14) приведем в следующей заметке. Укажем также, что для этого случая решение соответствующей краевой задачи установившейся конвективной диффузии получено при помощи метода суммарных представлений [6] и метода Фурье [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющей интерес для мелиорации и гидротехники.— Изв. АН СССР. ОТН, 1953, № 10, с. 1369—1382.
2. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. К., «Наук. думка», 1974, 199 с.
3. Лаврик В. І. Фільтрація із річок і водосховищ при скінченній глибині залягання водоупору.— Допов. АН УРСР, 1963, № 9, с. 1131—1135.
4. Нумеров С. Н., Патрашев А. Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений.— В кн. Труды ЛПИ. 1947, № 4, с. 165—169.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966, 724 с.
6. Лаврик В. І., Мілютін О. Ф. Про розсолювання грунтів при фільтрації з каналу в горизонтальну дрену.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 10, с. 901—906.
7. Лаврик В. И., Рудченко П. А. Постановка и решение задач о диффузии растворимых веществ при фильтрации грунтовых вод.— В кн.: Краевые задачи подземной гидродинамики. Изд. Ин-та математики АН УССР, 1975, с. 42—57.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 11.III 1976 г.