УДК 517.949

З. Б. Сеидов

Краевая задача с управляющими параметрами для дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти такие значения параметров τ, λ ($\underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\tau}$, $\underline{\tau} > 0$, $|\lambda| \leqslant \rho$), при которых начальная задача

$$\begin{aligned} &x''(t) = a\tau + b\lambda + f(t, x(t), x(t-\tau), \tau, \lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ &x(t) = \varphi(t, \tau, \lambda), \qquad\qquad -\overline{\tau} \leqslant t < 0, \\ &x(0) = x_0, \\ &x'(0) = x_0' \end{aligned} \tag{1}$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$x(T) = x_T, \tag{2}$$

$$x'(T) = x_T'. \tag{3}$$

В работе методом последовательных приближений доказывается существование и единственность решения задачи (1) — (3). Далее, исследуется аналогичная задача с нелинейными краевыми условиями.

1. Сначала исследуем начальную задачу (1) для каждых фиксированных значений τ, λ.

Лемма 1. *Пусть функция* $f(t, x, y, \tau, \lambda)$ *непрерывна при* $t \in [0, T]$, $|x|, |y| \leqslant r$, $\tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$, $|\lambda| \leqslant \rho$ *и*

$$|f(t, x, y, \tau, \lambda)| \leqslant M,$$

$$|f(t, x_1, y_1, \tau_1, \lambda_1) - f(t, x_2, y_2, \tau_2, \lambda_2)| \leqslant$$
$$\leqslant K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |\tau_1 - \tau_2| + |\lambda_1 - \lambda_2|).$$

Функция $\varphi(t, \tau, \lambda)$ *непрерывна при* $t \in [-\bar{\tau}, 0]$, $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, $|\lambda| \leqslant \rho$ *и*

$$|\varphi(t, \tau, \lambda)| \leqslant M_1,$$

$$|\varphi(t_1, \tau_1, \lambda_1) - \varphi(t_2, \tau_2, \lambda_2)| \leqslant N(|t_1 - t_2| + |\tau_1 - \tau_2| + |\lambda_1 - \lambda_2|),$$

$$\frac{T^2}{2}(|a|\bar{\tau} + |b|\rho) + T|x_0'| + |x_0| + \frac{MT^2}{2} \leqslant r.$$

Тогда для каждых значений τ, λ, ($\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, $|\lambda| \leqslant \rho$) *существует единственное решение задачи* (1) *и справедлива оценка*

$$|x(t, \tau_1, \lambda_1) - x(t, \tau_2, \lambda_2)| \leqslant \delta_1|\tau_1 - \tau_2| + \delta_2|\lambda_1 - \lambda_2|;$$

здесь

$$\delta_1 = Te^{2KT^2}\left[\frac{T}{2}(|a| + K) + 2KN\bar{\tau} + K(r + M_1 + 2r(T - \underline{\tau}))\right],$$

$$\delta_2 = Te^{2KT^2}\left[\frac{T}{2}(|b| + K) + KN\bar{\tau}\right].$$

Доказательство. Существование единственного решения задачи (1) для каждых значений τ, λ очевидно. Пусть $x(t, \tau_1, \lambda_1)$, $x(t, \tau_2, \lambda_2)$ являются решениями задачи (1) для соответствующих значений τ_1, λ_1 и τ_2, λ_2. Тогда, учитывая условия леммы, имеем

$$|x(t, \tau_1, \lambda_1) - x(t, \tau_2, \lambda_2)| \leqslant \frac{T^2}{2}(|a| + K)|\tau_1 - \tau_2| + \frac{T^2}{2}(|b| + K)|\lambda_1 - \lambda_2| +$$
$$+ KT\int_0^t |x(s, \tau_1, \lambda_1) - x(s, \tau_2, \lambda_2)|\,ds + KT\int_0^t |x(s - \tau_1, \tau_1, \lambda_1) - x(s - \tau_2,$$
$$\tau_2, \lambda_2)|\,ds \leqslant \frac{T^2}{2}(|a| + K)|\tau_1 - \tau_2| + \frac{T^2}{2}(|b| + K)|\lambda_1 - \lambda_2| +$$
$$+ KTN\bar{\tau}(|\tau_1 - \tau_2| + |\lambda_1 - \lambda_2|) + 2KT\int_0^t |x(s, \tau_1, \lambda_1) - x(s, \tau_2, \lambda_2)|\,ds +$$
$$+ KT\int_0^t |x(s - \tau_1, \tau_2, \lambda_2) - x(s - \tau_2, \tau_2, \lambda_2)|\,ds.$$

Легко заметить, что

$$\int_0^t |x(s - \tau_1, \tau_2, \lambda_2) - x(s - \tau_2, \tau_2, \lambda_2)|\,ds \leqslant [N\bar{\tau} + r + M_1 + 2r(T - \underline{\tau})]|\tau_1 - \tau_2|.$$

Тогда будем иметь

$$|x(t, \tau_1, \lambda_1) - x(t, \tau_2, \lambda_2)| \leqslant T\left[\frac{T}{2}(|a| + K) + 2KN\bar{\tau} +\right.$$
$$\left.+ K(r + M_1 + 2r(T - \underline{\tau}))\right]|\tau_1 - \tau_2| + T\left(\frac{T}{2}(|b| + K) + KN\bar{\tau}\right)|\lambda_1 - \lambda_2| +$$
$$+ 2KT\int_0^t |x(s, \tau_1, \lambda_1) - x(s, \tau_2, \lambda_2)|\,ds.$$

Отсюда, применяя неравенство Гронуолла — Беллмана [1], получаем

$$|x(t, \tau_1, \lambda_1) - x(t, \tau_2, \lambda_2)| \leqslant \delta_1 |\tau_1 - \tau_2| + \delta_2 |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Лемма доказана.

2. Краевая задача (1) — (3) эквивалентна системе уравнений

$$\tau = 2T^{-2}a^{-1}\left[x_T - x_0 - Tx_0' - \frac{T^2}{2} b\lambda - \int_0^T (T-s) f(s, x(s, \tau, \lambda), x(s-\tau, \tau, \lambda)\, \tau, \lambda)\, ds\right],$$

$$\lambda = T^{-1}b^{-1}\left[x_T' - Ta\tau - x_0' - \int_0^T f(s, x(s, \tau, \lambda), x(s-\tau, \tau, \lambda), \tau, \lambda)\, ds\right]. \tag{4}$$

Здесь $x(t, \tau, \lambda)$ — решение начальной задачи (1) для соответствующих значений τ, λ.

Последовательные приближения для системы (4) имеют вид:

$$\tau_{n+1} = 2T^{-2}a^{-1}\left[x_T - x_0 - Tx_0' - \frac{T^2}{2} b\lambda_n - \int_0^T (T-s) f(s, x(s, \tau_n, \lambda_n), x(s-\tau_n, \tau_n, \lambda_n), \tau_n, \lambda_n)\, ds\right],$$

$$\lambda_{n+1} = T^{-1}b^{-1}\left[x_T' - Ta\tau_n - x_0' - \int_0^T f(s, x(s, \tau_n, \lambda_n), x(s-\tau_n, \tau_n, \lambda_n), \tau_n, \lambda_n) ds\right];$$

здесь $\lambda_0 = 0$, $\underline{\tau} \leqslant \tau_0 \leqslant \bar{\tau}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Пусть, далее,*

$$2T^{-2}|a|^{-1}\left(|x_T| + |x_0| + T|x_0'| + \frac{T^2}{2}(|b|\rho + M)\right) \leqslant \bar{\tau},$$

$\forall$ *непрерывной на* $[0, T]$ *функции* $x(t)$ $(|x(t)| \leqslant r)$ *и* $\forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, $|\lambda| \leqslant \rho$

$$2T^{-2}a^{-1}\left[x_T - x_0 - Tx_0' - \frac{T^2}{2} b\lambda - \int_0^T (T-s) f(s, x(s), x(s-\tau), \tau, \lambda)\, ds\right] \geqslant \underline{\tau},$$

$$T^{-1}|b|^{-1}(|x_T'| + T|a|\bar{\tau} + |x_0'| + MT) \leqslant \rho,$$

$$q = \max\{[K|a|^{-1}(1 + 4\delta_1) + KT^{-1}(2|a|^{-1} + |b|^{-1})(2N\bar{\tau} + r + M_1 + 2r(T - \underline{\tau})) + |b|^{-1}(|a| + K(1 + 2\delta_1))],\ [|a|^{-1}|b| + K(|a|^{-1}(1 + 4\delta_2) + |b|^{-1}(1 + 2\delta_2)) + KN\bar{\tau}T^{-1}(|b|^{-1} + 2|a|^{-1})]\} < 1.$$

Тогда краевая задача (1) — (3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Легко заметить, что $\underline{\tau} \leqslant \tau_n \leqslant \bar{\tau}$, $|\lambda_n| \leqslant \rho$.

Далее,

$$|\tau_{n+1}-\tau_n| \leqslant 2T^{-2}|a|^{-1}\Big[\frac{KT^2}{2}|\tau_n-\tau_{n-1}|+\frac{T^2}{2}(|b|+K)|\lambda_n-\lambda_{n-1}|+$$

$$+KT\int_0^T |x(s,\tau_n,\lambda_n)-x(s,\tau_{n-1},\lambda_{n-1})|\,ds+KT\int_0^T |x(s-\tau_n,\tau_n,\lambda_n)-$$

$$-x(s-\tau_{n-1},\tau_{n-1},\lambda_{n-1})|\,ds\Big] \leqslant 2T^{-1}|a|^{-1}\Big\{\Big[\frac{KT}{2}(1+4\delta_1)+$$

$$+K(2N\bar{\tau}+r+M_1+2r(T-\underline{\tau}))\Big]|\tau_n-\tau_{n-1}|+$$

$$+\Big[\frac{T}{2}|b|+\frac{KT}{2}(1+4\delta_2)+KN\bar{\tau}\Big]|\lambda_n-\lambda_{n-1}|\Big\},$$

$$|\lambda_{n+1}-\lambda_n| \leqslant T^{-1}|b|^{-1}\Big[T(|a|+K(1+\delta_1))|\tau_n-\tau_{n-1}|+KT(1+$$

$$+\delta_2)|\lambda_n-\lambda_{n-1}|+K\int_0^T |x(s-\tau_n,\tau_n,\lambda_n)-x(s-\tau_{n-1},\tau_n,\lambda_n)|\,ds+$$

$$+K\int_0^T |x(s-\tau_{n-1},\tau_n,\lambda_n)-x(s-\tau_{n-1},\tau_{n-1},\lambda_{n-1})|\,ds\Big] \leqslant$$

$$\leqslant T^{-1}|b|^{-1}\{[T|a|+KT(1+2\delta_1)+K(2N\bar{\tau}+r+M_1+2r(T-\underline{\tau}))]|\tau_n-$$

$$-\tau_{n-1}|+K(T(1+2\delta_2)+N\bar{\tau})|\lambda_n-\lambda_{n-1}|\}.$$

Отсюда имеем

$$|\tau_{n+1}-\tau_n|+|\lambda_{n+1}-\lambda_n| \leqslant q(|\tau_n-\tau_{n-1}|+|\lambda_n-\lambda_{n-1}|).$$

Так как $q<1$, то последовательности $\{\tau_n\}$, $\{\lambda_n\}$ сходятся. Нетрудно убедиться, что пределы этих последовательностей являются единственным решением задачи (1) — (3). Теорема доказана.

3. Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &x''(t)=0,1(\lambda+x(t-\tau)), \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad 0{,}5\leqslant\tau\leqslant 1, \quad |\lambda|\leqslant 20,\\ &x(t)=0, \qquad -1\leqslant t\leqslant 0, \\ &x'(0)=0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x(1)&=1,\\ x'(1)&=2. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение начальной задачи (5) для каждых фиксированных значений τ, λ имеет вид

$$x(t)=\begin{cases}0{,}05\lambda t^2, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0{,}05\lambda t^2+\dfrac{0{,}01\lambda}{24}(t-\tau)^4, & \tau\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Учитывая краевые условия (6) для параметров τ, λ, имеем следующую систему уравнений:

$$\lambda\Big[1+\frac{0{,}1}{6}(1-\tau)^3\Big]=20,$$

$$\lambda\left[1+\frac{0,1}{12}(1-\tau)^4\right]=20,$$

имеющая единственное решение в данной области: $\tau=1$, $\lambda=20$.

Таким образом, краевая задача (5), (6) имеет единственное решение вида

$$x(t)=t^2 \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Заметим, что если условие $x'(1)=2$ заменить условием $x'(1)=1$, то исходная задача не имеет решения.

4. Теперь рассмотрим более общую краевую задачу

$$\begin{aligned}
&x''(t)=f(t,x(t),\ x(t-\tau),\tau,\lambda), && 0\leqslant t\leqslant T,\\
&x(t)=\varphi(t,\tau,\lambda), && -\bar\tau\leqslant t<0,\\
&x(0)=x_0,\\
&x'(0)=x_0',
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\tau&=\Phi_1(\tau,\lambda,x(T),x'(T)),\\
\lambda&=\Phi_2(\tau,\lambda,x(T),x'(T)).
\end{aligned} \tag{8}$$

Л е м м а 2. *Пусть функции* $f(t,x,y,\tau,\lambda)$, $\varphi(t,\tau,\lambda)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1.

Тогда для решения начальной задачи (7) *верны оценки*

$$|x(t,\tau_1,\lambda_1)-x(t,\tau_2,\lambda_2)|\leqslant\Delta_1|\tau_1-\tau_2|+\Delta_2|\lambda_1-\lambda_2|,$$
$$|x'(t,\tau_1,\lambda_1)-x'(t,\tau_2,\lambda_2)|\leqslant\Delta_3|\tau_1-\tau_2|+\Delta_4|\lambda_1-\lambda_2|,$$

где

$$\Delta_1=KTe^{2KT^2}\left[\frac{T}{2}+2N\bar\tau+r+M_1+2r(T-\underline{\tau})\right],\quad \Delta_2=KTe^{2KT^2}\left(\frac{T}{2}+N\bar\tau\right),$$

$$\Delta_3=K[T(1+2\Delta_1)+2N\bar\tau+r+M_1+2r(T-\underline{\tau})],\quad \Delta_4=K[T(1+2\Delta_2)+N\bar\tau].$$

Таким образом, краевая задача (7), (8) эквивалентна системе уравнений

$$\tau=\Phi_1(\tau,\lambda,x(T,\tau,\lambda),x'(T,\tau,\lambda)),$$
$$\lambda=\Phi_2(\tau,\lambda,x(T,\tau,\lambda),x'(T,\tau,\lambda)).$$

Последовательные приближения для этой системы имеют вид

$$\tau_{n+1}=\Phi_1(\tau_n,\lambda_n,x(T,\tau_n,\lambda_n),x'(T,\tau_n,\lambda_n)),$$
$$\lambda_{n+1}=\Phi_2(\tau_n,\lambda_n,x(T,\tau_n,\lambda_n),x'(T,\tau_n,\lambda_n));$$

здесь $\underline{\tau}\leqslant\tau_0\leqslant\bar\tau$, $\lambda_0=0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Далее,*

$$|\Phi_i(\tau_1,\lambda_1,x_1,y_1)-\Phi_i(\tau_2,\lambda_2,x_2,y_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_i(|\tau_1-\tau_2|+|\lambda_1-\lambda_2|+|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)\quad i=(1,2),$$

$$\underline{\tau}\leqslant\Phi_1(\tau,\lambda,x,y)\leqslant\bar\tau,\quad |\Phi_2(\tau,\lambda,x,y)|\leqslant\rho,$$

$$q=\max[(\gamma_1+\gamma_2)(1+\Delta_1+\Delta_3),\quad (\gamma_1+\gamma_2)(1+\Delta_2+\Delta_4]<1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (7), (8).

Доказательство. Так как $\underline{\tau} \leqslant \tau_0 \leqslant \bar{\tau}$, $\lambda_0 = 0$, то в силу условий теоремы $\underline{\tau} \leqslant \tau_n \leqslant \bar{\tau}$, $|\lambda_n| \leqslant \rho$.

Далее,

$$|\tau_{n+1} - \tau_n| \leqslant \gamma_1 (|\tau_n - \tau_{n-1}| + |\lambda_n - \lambda_{n-1}| + |x(T, \tau_n, \lambda_n) - x(T, \tau_{n-1}, \lambda_{n-1})| + |x'(T, \tau_n, \lambda_n) - x'(T, \tau_{n-1}, \lambda_{n-1})|),$$

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant \gamma_2 (|\tau_n - \tau_{n-1}| + |\lambda_n - \lambda_{n-1}| + |x(T, \tau_{n-1}, \lambda_{n-1}) - x(T, \tau_n, \lambda_n)| + |x'(T, \tau_n, \lambda_n) - x'(T, \tau_{n-1}, \lambda_{n-1})|).$$

Учитывая здесь утверждение леммы 2, имеем

$$|\tau_{n+1} - \tau_n| \leqslant \gamma_1 (1 + \Delta_1 + \Delta_3) |\tau_n - \tau_{n-1}| + \gamma_1 (1 + \Delta_2 + \Delta_4) |\lambda_n - \lambda_{n-1}|,$$

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant \gamma_2 (1 + \Delta_1 + \Delta_3) |\tau_n - \tau_{n-1}| + \gamma_2 (1 + \Delta_2 + \Delta_4) |\lambda_n - \lambda_{n-1}|.$$

Отсюда

$$|\tau_{n+1} - \tau_n| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant q (|\tau_n - \tau_{n-1}| + |\lambda_n - \lambda_{n-1}|).$$

Так как $q < 1$, то последовательности $\{\tau_n\}$, $\{\lambda_n\}$ сходятся и их пределы являются единственным решением задачи (7), (8). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954, 215 с.
2. Сеидов З. Б. Краевая задача с параметром для систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом.— УМЖ, 26, № 5, 1974, с. 671—677.

Азербайджанский государственный университет Поступила в редакцию 20.XI 1975 г.