УДК 517.948.34

К. Хекимов, Х. Эшматов

Об усреднении в некоторых системах интегро-дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми переменными

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}\dot{x} = \varepsilon X\left(t, x, y, \int_0^t \varphi(t, s, x(s), y(s))\, ds\right),\\ \ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = F\left(t, x, \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s))\, ds\right),\end{gathered} \tag{1}$$

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор, X и φ — вектор-функции; y — скаляр; F и φ_1 — скалярные функции векторного аргумента x.

Как известно, исследования различных динамических задач теории вязко-упругости [1—3] сводятся к изучению систем интегро-дифференциальных уравнений вида (1).

В работах [1, 3—6] А. Н. Филатов доказал теоремы обоснования метода усреднения в системах интегро-дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными на конечном и бесконечном промежутках времени.

В данной работе, исходя из результатов метода усреднения интегро-дифференциальных уравнений [1, 4—10], доказывается теорема о близости решений исходной и усредненной систем на конечном отрезке времени.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получаем вырожденную систему

$$\dot{x} = 0,$$
$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = F\left(t, x, \int_0^t \varphi_1(t, s, x(s))\, ds\right).$$

Решение вырожденной системы имеет вид

$$x = \text{const}, \tag{2}$$

$$\bar{y}(t, x) = \alpha e^{-\gamma t} \sin(\Omega t + \beta) + \frac{1}{\Omega} \int_0^t f(t, \tau) F\left(\tau, x, \int_0^\tau \varphi_1(\tau, s, x)\, ds\right) d\tau,$$

где α, β — постоянные, зависящие от $y_0, \dot{y}_0$,

$$f(t, \tau) = e^{-\gamma(t-\tau)} \sin \Omega (t - \tau), \ \Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2, \ \gamma \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию X на траектории решения вырожденной системы (2):

$$X\left(t, x, \bar{y}(t, x, y_0, \dot{y}_0), \int_0^t \varphi(t, s, x, \bar{y}(s, x, y_0, \dot{y}_0))\, ds\right),$$

Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \bar{y}(t, x, y_0, \dot{y}_0), \psi(t, x, y_0, \dot{y}_0))\, dt = X_0(x). \tag{3}$$

Здесь интеграл

$$\psi(t, x, y_0, \dot{y}_0) = \int_0^t \varphi(t, s, x, \bar{y}(s, x, y_0, \dot{y}_0))\, ds$$

вычисляется по явно входящему переменному s, а t и x считаются параметрами. Тогда системе (1) поставим в соответствие следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi). \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции* $X(t, x, y, u)$, $\varphi(t, s, x, y)$ $F(t, x, v)$ *и* $\varphi_1(t, s, x)$ *определены и непрерывны в области*

$$Q\{t, s \geqslant 0;\ x \in D \subset E_n;\ y \in E_1,\ u \in E_p,\ v \in E_q\}$$

и пусть в этой области:

1)
$$X(t, x, y, u) \in \mathrm{Lip}_{x,y,u}(\lambda, Q), \ \varphi(t, s, x, y) \in \mathrm{Lip}_{x,y}(\mu(t, s), Q),$$
$$F(t, x, v) \in \mathrm{Lip}_{x,v}(\lambda_1, Q), \ \varphi_1(t, s, x) \in \mathrm{Lip}_x(\mu_1(t, s), Q);$$

2)
$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\,|s - \tau|\, ds \leqslant t^2\psi(t), \ \psi(t) \to 0, \ t \to \infty,$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds \leqslant Ct, \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau \mu_1(\tau, s)\, |s-\tau|\, ds \leqslant C_1,$$

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau \mu_1(\tau, s)\, ds \leqslant C_2;$$

3) *в каждой точке* $x \in D$ *вдоль вырожденного решения* $\bar{y}(t, x, y_0, \dot{y}_0)$ *системы* (1) *существует предел* (3), *не зависящий от* $y_0, \dot{y}_0$;

4) *вдоль траектории* $\xi = \xi(t)\, |X_0(\xi)| \leqslant M$;

5) *решение* $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x(0) \in D$ *усредненного уравнения* (4) *определено для всех* $t \geqslant 0$ *и лежит в области* D *с некоторой* ρ*-окрестностью.*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* ε_0, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *существует решение* $x(t)$, $y(t)$, *для которого выполняется неравенство*: $|x(t) - \xi(t)| < \eta$.

Доказательство. Представляя системы (1) и (4) в виде интегральных уравнений, находим

$$z(t) = x(t) - \xi(t) = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3; \tag{5}$$

здесь

$$\Phi_1 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Big(\tau, x(\tau), y(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s), y(s))\, ds\Big) -$$

$$- X\Big(\tau, \xi(\tau), y(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s), y(s))\, ds\Big) \Bigg] d\tau,$$

$$\Phi_2 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Big(\tau, \xi(\tau), y(\tau, x(\tau)), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s), y(s, x(s)))\, ds\Big) -$$

$$- X\Big(\tau, \xi(\tau), \bar{y}(\tau, \xi(\tau)), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau), \bar{y}(s, \xi(\tau)))\, ds\Big) \Bigg] d\tau,$$

$$\Phi_3 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Big(\tau, \xi(\tau), \bar{y}(\tau, \xi(\tau)), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau), \bar{y}(s, \xi(\tau)))\, ds\Big) - X_0(\xi(\tau)) \Bigg] d\tau.$$

В силу условий теоремы, как в [1], можно показать, что $|\Phi_3|$ при фиксированном достаточно малом ε на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет меньше наперед заданного числа $a(\varepsilon)$, т. е.

$$|\Phi_3| \leqslant a. \tag{6}$$

Теперь оценим остальные два слагаемых в правой части (5). Имеем

$$|\Phi_1| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \left\{ |x(\tau) - \xi(\tau)| + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, |x(s) - \xi(s)|\, ds \right\} d\tau, \tag{7}$$

$$|\Phi_2| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \Big\{ |y(\tau, x(\tau)) - \bar{y}(\tau, \xi(\tau))| + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, [\, |\xi(s) - \xi(\tau)| +$$

$$+ |y(s, x(s)) - \bar{y}(s, \xi(s))|\,]\, ds \Big\} d\tau. \tag{8}$$

Поскольку

$$|\xi(s) - \xi(\tau)| \leqslant \varepsilon M\, |s - \tau|, \; |f(t, \tau)| \leqslant e^{-\gamma(t-\tau)},$$

$$|y(\tau, x(\tau)) - \bar{y}(\tau, \xi(\tau))| \leqslant \frac{\lambda_1}{\Omega} \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-\sigma)} \Big\{ |x(\sigma) - \xi(\sigma)| +$$

$$+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,|x(\theta)-\xi(\theta)|\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma+\frac{\varepsilon\lambda_1 M}{\Omega}\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-\sigma)}\Bigg\{|\sigma-\tau|+$$

$$+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,|\theta-\tau|\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma,$$

$$|y(s,x(s))-\bar{y}(s,\ \xi(\tau))|\leqslant|y(s,\ x(s))-\bar{y}(s,\xi(s))|+|\bar{y}(s,\xi(s))-\bar{y}(s,\xi(\tau))|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\lambda_1}{\Omega}\int_0^s e^{-\gamma(s-\sigma)}\Bigg\{|x(\sigma)-\xi(\sigma)|+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,|x(\theta)-\xi(\theta)|\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma+$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda_1 M}{\Omega}\int_0^s e^{-\gamma(s-\sigma)}\Bigg\{|\sigma-s|+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,|\theta-s|\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma+$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda_1 M\,|s-\tau|}{\Omega}\int_0^s e^{-\gamma(s-\sigma)}\Bigg\{1+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma,$$

то из (8) на отрезке $0\leqslant t\leqslant L\varepsilon^{-1}$ получаем оценку

$$|\Phi_2|\leqslant b(\varepsilon)+\frac{\varepsilon\lambda\lambda_1}{\Omega}\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-\sigma)}\Bigg\{|x(\sigma)-\xi(\sigma)|+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,|x(\theta)-$$

$$-\xi(\theta)|\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma+\frac{\varepsilon\lambda\lambda_1}{\Omega}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \mu(\tau,s)\,ds\times \tag{9}$$

$$\times\int_0^s e^{-\gamma(s-\sigma)}\Bigg\{|x(\sigma)-\xi(\sigma)|+\int_0^\sigma \mu_1(\sigma,\theta)\,|x(\theta)-\xi(\theta)|\,d\theta\Bigg\}\,d\sigma,$$

где

$$b(\varepsilon)=\frac{\varepsilon\lambda\lambda_1 M}{\Omega}\left\{\frac{L}{\gamma^2}\,(e^{-\frac{\gamma L}{\varepsilon}}+1)+\frac{2\varepsilon}{\gamma^3}(e^{-\frac{\gamma L}{\varepsilon}}-1)+L\left(C_1+CC_1+\frac{C}{\gamma^2}\right)\right\}+$$

$$+\lambda M\left(1+\frac{\lambda_1 M}{\Omega\gamma}+\frac{\lambda_1 MC_2}{\Omega}\right)\psi_0(\varepsilon),$$

$$\psi_0(\varepsilon)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant L}\tau^2\psi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right),\ \ \psi_0(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Ясно, что $b(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда из (5) — (9) следует

$$|z(t)|\leqslant a+b+\varepsilon\lambda\int_0^t\Bigg\{|z(\tau)|+\int_0^\tau \mu(\tau,s)\,|z(s)|\,ds\Bigg\}\,d\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda\lambda_1}{\Omega}\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-s)}\Bigg\{|z(s)|+\int_0^s \mu_1(s,\theta)\,|z(\theta)|\,d\theta\Bigg\}\,ds+$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda\lambda_1}{\Omega}\int_0^t d\tau\int_0^\tau \mu(\tau,s)\,ds\int_0^s e^{-\gamma(s-\theta)}\Bigg\{|z(\theta)|+\int_0^\theta \mu_1(\theta,\sigma)\,|z(\sigma)|\,d\sigma\Bigg\}\,d\theta.$$

Отсюда на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ находим

$$|z(t)| \leqslant (a+b)\exp\left\{\lambda L(1+C)\left[1+\frac{\lambda_1}{\Omega}\left(\frac{1}{\gamma}+C_2\right)\right]\right\}. \tag{10}$$

Нетрудно показать, что в силу условий теоремы $x(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ не покидает область D, то, полагая в (10)

$$(a+b) < \min\{\rho, \eta\}\exp\left\{-\lambda L(1+C)\left[1+\frac{\lambda_1}{\Omega}\left(\frac{1}{\gamma}+C_2\right)\right]\right\},$$

получаем утверждение теоремы.

Эта задача для обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрена в работе [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971, 278 с.
2. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термо-вязкой ко-упругости. М., «Наука», 1970, 280 с.
3. Тохтаров У., Колтунов М. А., Моргунов Б. И., Трояновский И. Е. Нелинейная динамическая задача о цилиндре. с меняющейся внутренней границей.— Механика полимеров, 1973, № 2.
4. Филатов А. Н. Усреднение в системах интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.— В кн.: Исследования по аналитической механике, Ташкент, «Фан», 1965.
5. Филатов А. Н. Усреднение в системах дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений. Ташкент, «Фан», 1967.
6. Филатов А. Н. Асимптотические методы в нелинейной теории вязко-упругости.— Механика полимеров, 1974, № 2.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963, 410 с.
8. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К., «Наук. думка», 1971, 440 с.
9. Митропольский Ю. А., Филатов А. Н. Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.— УМЖ, 1972, **24**, № 1, с. 30—49.
10. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971, 506 с.
11. Ракин Л. В. Об оценке решений одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 10, с. 1908—1910.

Институт кибернетики АН УзССР

Поступила в редакцию 30.XII 1974 г.,
после переработки — 27.V 1976 г.