УДК 517.955,519.21

Ю. Л. Далецький

Оцінка розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь другого порядку, яка не залежить від розмірності

1. Розглянемо параболічне рівняння другого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L}u = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)\,u,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \qquad (1)$$

з досить гладкими обмеженими коефіцієнтами та самоспряженою позитивною матрицею $A(x) = \| a_{jk} \|$. Добре відомі оцінки розв'язків задачі Коші для цього рівняння (див. [1—3]). Нас, одначе, цікавить одержання таких оцінок похідних розв'язків цієї задачі, які не містять явно розмірності, а залежать лише від тих або інших норм коефіцієнтів та початкових функцій. Такі оцінки виявляються корисними при розгляданні диференціальних рівнянь стосовно функцій нескінченновимірного аргументу.

У цій роботі вказується один підхід до одержання таких оцінок. Він оснований на дослідженні системи рівнянь, яку задовольняють похідні розв'язків рівняння (1). При сталих коефіцієнтах це дослідження тривіальне. В загальному випадку воно проводиться за допомогою ймовірносних методів, пов'язаних із зображенням розв'язків параболічної системи у вигляді середнього по простору траєкторій [4].

Введемо перш за все деякі позначення та означення. Нехай H, H_1, H_2 — дійсні гільбертові простори (можливо, скінченновимірні евклідові). Скрізь, за винятком останнього пункту, вважатимемо їх скінченновимірними. Проте зручно проводити міркування в інваріантній формі, не залежній від розмірності та вибору координатного базису. Це дозволить нам записати всі основні співвідношення у формі, яка формально коректна і в нескінченновимірному випадку. Далі буде вказано міркування, що роблять цю коректність змістовною, й наведено результати, які відносяться вже до параболічного рівняння в функціональних похідних, введеного в роботі [5].

Позначимо через $L(H, H_1)$ простір обмежених лінійних операторів, які діють із H в H_1, $L(H) = L(H, H)$, $L(H \times H_1, H_2)$ — простір обмежених білінійних операторів, що діють із $H \times H_1$ в H_2. Нехай далі $L_2(H, H_1) \subseteq L(H, H_1)$—гільбертовий простір операторів Гільберта — Шмідта з H в H_1 зі звичайним скалярним добутком $\operatorname{Sp} B^*A$ (він ізоморфний $L(H, H_1)$ при $\dim H < \infty$). Кожному $\alpha \in L(H \times H_1; H_2)$ природно зіставляємо оператор $\hat{\alpha} \in L(H_1, L(H, H_2))$ так, що $(\hat{\alpha}\varphi)\psi = \alpha(\psi, \varphi)$, $(\psi \in H,\ \varphi \in H_1)$. Позначимо через $L_2(H \times H_1; H_2)$ простір тих $\alpha \in L(H \times H_1; H_2)$, для яких $\hat{\alpha} \in \hat{L} = L(H_1, L_2(H, H_2))$ (відзначимо, що в скінченновимірному випадку це вірно при будь-якому $\alpha \in L(H \times H_1; H_2)$).

Норми елементів різних просторів будуть звичайно позначатись одним і тим же символом $\|\cdot\|$, інколи при цьому буде використовуватися індекс, що вказує простір, наприклад $\|f\|_{H_1}$ при $f \in H_1$. Якщо $f(x)$ $(x \in H)$ — векторна або операторна функція, то $|||f|||_{H_1} = \sup\limits_{H} \|f(x)\|_{H_1}$.

Похідні скалярних і векторних функцій означимо за допомогою співвідношення Тейлора $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)(h, h) + o(\|h\|^2)$. Таким чином, при $f(x) \in H_1$ $(x \in H)$ $f'(x) \in L(H, H_1)$ та $f''(x) \in L(H \times H; H_1)$. Зокрема, для скалярної функції $f(x)$ при $x = (x_1, \ldots, x_n)$: $f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градієнт, а $f''(x) = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|$ — гессіан. Для операторної функції $S(x) \in L(H_1, H_2)$ із означення випливає, що $S'(x) \in L(H, L(H_1, H_2))$, $S''(x) \in L(H \times H, L(H_1, H_2))$ $(x \in H)$, так що $(S'(x)h)\varphi = (S(x)\varphi)'h$; $(S''(x)(h_1, h_2))(\varphi) = (S(x)\varphi)''(h_1, h_2)$. Позначимо при цьому через $\tilde{S}'$ елемент простору $L(H_1 \times H_2; H)$, що визначається формулою $(\tilde{S}'(x)(h_1, h_2), h)_H = ((S'(x)h)h_1, h_2)_{H_2}$.

Перепишемо тепер в інваріантній формі рівняння (1). Нехай $H = \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$. Тоді можна оператор $\mathfrak{L}$ записати:

$$\mathfrak{L}u(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A(x) u''(x) + (b(x), u'(x)) + c(x)u(x) \equiv$$

$$\equiv \left[\frac{1}{2}(A(x)D, D) + (b(x), D) + c(x)\right] u(x).$$

Далі скрізь припускатимемо, що коефіцієнти $b(x)$, $c(x)$, $V(x)$, де $V(x)V^*(x) = A(x)$ належать класу $C_2(H)$ функцій на H, неперервних і обмежених у відповідних нормах разом з похідними до другого порядку включно. При цих умовах задача Коші для рівняння (1) з початковою функцією класу C_2 має точно один розв'язок, що належить до цього ж класу (див., наприклад, [6] або в нескінченновимірному випадку [5]).

Ми не робимо жодних припущень про невиродженість оператора $A(x)$. Якщо ж таке припущення прийняти, то двічі неперервно диференційовний розв'язок задачі Коші існує і в тому випадку, коли коефіцієнти рівняння не гладкі, а тільки задовольняють умову Ліпшіца (див. [1—3]). Без припущення про невиродженість в цьому випадку можна стверджувати існування неперервного узагальненого розв'язку [7].

Із чисто технічних міркувань будемо розглядати задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{L}u = 0 \ (0 \leqslant t \leqslant \tau), \quad u(\tau, x) = u_0(x) \tag{2}$$

з умовою на правому кінці проміжку.

Відзначимо, нарешті, що тільки для скорочення запису розглядається рівняння з коефіцієнтами, що не залежать від часу t. Всі результати й міркування без будь-яких ускладнень поширюються і на рівняння з коефіцієнтами, неперервно залежними від t разом з похідними по просторових координатах.

2. Наведемо у зручній для нас формі деякі відомості з теорії стохастичних рівнянь, які грають нижче важливу роль [5—7]. Нехай $w(t)$ — вінерівський процес у H. Розглянемо випадковий процес $\xi(t) = \xi(x; t_0, t)$, однозначно визначений рівнянням

$$d\xi(t) = b(\xi(t))\,dt + V(\xi(t))\,dw(t); \quad \xi(t_0) = x. \tag{3}$$

Функція $u(t, x) = Eu_0(\xi(x; t, \tau))$ $(x \in H,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau)$ є розв'язком задачі (2) при $c(x) \equiv 0$.

Нехай тепер $\beta(x) \in H$ $(x \in H)$ і

$$Y_\xi(t, \tau) = \exp\left\{\int_t^\tau (\beta(\xi(s)), dw(s)) + \int_t^\tau \left[c(\xi(s)) - \frac{1}{2}\|\beta(\xi(s))\|^2\right] ds\right\}. \tag{4}$$

Тоді функція

$$u(t, x) = EY_{\xi(x; t, \tau)}(t, \tau)\, u_0(\xi(x; t, \tau)) \tag{5}$$

є розв'язком задачі, яку одержуємо із (2) заміною вектора b на $b_1 = b + V\beta$. Виявляється (див. [4]), що ці міркування допускають узагальнення, яке дозволяє одержати зображення розв'язку задачі Коші для параболічної системи, що має вигляд

$$\frac{\partial y_s}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial y_s}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j,k=1}^{n} v_{kj}(x)\,\alpha_{sjr}(x)\frac{\partial y_r}{\partial x_k} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} c_{sr}(x)\, y_r = 0, \quad y_s(\tau, x) = y_0(x); \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau; \quad s = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

В інваріантній формі ця система може бути записана як рівняння відносно векторної функції $y(t, x)$ $(x \in H)$ зі значеннями в просторі H_1:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathfrak{L}_1 y \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2}(A(x)D, D)\,y + (b(x), D)\,y + \alpha(x)(V^*(x)D, y) +$$

$$+ c_1(x)\,y = 0; \quad y(\tau) = y_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau). \tag{7}$$

Тут $V(x) \in L(H, H)$, $A(x) = V(x)V^*(x)$, $b(x) \in H$ ті ж самі, що й вище, $c_1(x)$, $\alpha(x)$ — обмежені неперервні функції на H зі значеннями відповідно у просторах $L(H_1)$, $L_2(H \times H_1, H_1)$.

Як аналог скалярного мультиплікативного функціоналу Y_ξ візьмемо розв'язок лінійного стохастичного рівняння

$$Y_\xi(t_0, t)\varphi = \varphi + \int_{t_0}^{t} c_1(\xi(\theta)) Y_\xi(t_0, \theta)\varphi d\theta + \int_{t_0}^{t} \alpha(\xi(\theta))(dw(\theta), Y_\xi(t_0\theta)\varphi) \quad (\varphi \in H_1), \tag{8}$$

що являє собою операторну функцію зі значеннями з $L(H_1)$. Неважко перевірити, користуючись формулою Іто, що функціонал (4) задовольняє скалярний варіант цього рівняння при $\alpha(z, y) = (\beta, z)y$.

З результатів [4] випливає, що векторна функція

$$y(t, x) = EY^*_{\xi(x,t,\tau)}(t, \tau)\, y_0(\xi(x; t, \tau)) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau;\ x \in H) \tag{9}$$

є розв'язком задачі Коші (7). Для оцінки цього розв'язку треба оцінити розв'язок рівняння (8). Звичайним методом, основаним на використанні інтегральної нерівності Гронуолла, виводиться оцінка

$$E\| Y_\xi(t_0, t)\varphi\|^2_{H_1} \leqslant 3\|\varphi\|^2 \exp\{3(t - t_0)^2 |||c_1|||^2_{L(H_1)} + (t - t_0)|||\hat{\alpha}^2_{\hat{L}(H,H_1)}\}. \tag{10}$$

Її можна трактувати як оцінку норми оператора Y, що діє з H_1 у гільбертовий простір випадкових функцій зі значеннями з H_1, що мають скінченний другий момент. Використовуючи відповідну оцінку норми спряженого оператора, що діє із вказаного простору випадкових функцій в простір H_1, можна одержати шукану оцінку розв'язку задачі (7):

$$\| y(t, x)\|_{H_1} \leqslant \sqrt{3}\, |||y_0|||_{H_1} \exp\left\{\frac{3}{2}\tau^2 |||c_1|||^2_{L(H_1)} + \frac{3}{2}\tau |||\hat{\alpha}|||^2_{\hat{L}(H,H_1)}\right\}. \tag{11}$$

Нам буде потрібна ще оцінка розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \mathfrak{L}_1 y = f(t, x), \tag{12}$$

що легко випливає з (11). Наведемо її без подробиць:

$$\| y(t, x)\|_{H_1} \leqslant \sqrt{3}\,(|||y_0|||_{H_1} + \tau |||f|||_{H_1}) \exp\Big(\frac{3}{2}\tau^2 |||c_1|||^2_{L(H_1)} + \\ + \frac{3}{2}\tau |||\hat{\alpha}|||^2_{\hat{L}(H,H_1)}\Big) \quad (x \in H, 0 \leqslant t \leqslant \tau). \tag{13}$$

3. Перейдемо до оцінки градієнта задачі Коші, що розглядається. Перш за все виведемо рівняння для нього. Спочатку припустимо додатково, що коефіцієнти рівняння (2) досить гладкі, так що досить гладкі і його розв'язки. Тоді має зміст диференціальне рівняння, що одержується з (2) почленним диференціюванням по просторових координатах, яке відразу запишемо в інваріантній формі:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{2}(AD, D)u' + (b, D)u' + \widetilde{V}'(V^*D, u') + cu' + b'^*u' = \\ = -c'u,\ u'(x, \tau) = u'_0(x) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau). \tag{14}$$

Одержана задача є частинним випадком задачі (12) при $H_1 = H$; $y = u'$; $\alpha = \widetilde{V'}$, $c_1 = cI + b'^*$, $f = -c'u$. Це дозволяє скористатися оцінкою (13).

Зауважимо тепер, що хоч при відмовленні від лишньої гладкості коефіцієнтів рівняння (14) може вже не мати гладкого розв'язку, його узагальнений розв'язок, що зображається формулою, яка випливає з (9), як і раніше, зберігає зміст і є градієнтом розв'язку вихідної задачі. Це легко доводиться шляхом граничного переходу від розв'язків задач з достатньо гладкими коефіцієнтами. Разом з тим зберігають зміст всі проведені вище оцінки.

Сформулюємо кінцевий результат як теорему.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти $V(x)$, $b(x)$, $c(x)$ рівняння (2) і початкова функція $u_0(x)$ належать класу $C_2(H)$. Тоді виконується оцінка*

$$\| u'(t, x) \|_H \leqslant \sqrt{3}\, (||| u_0' |||_H + \tau ||| c' |||_H e^{\tau ||| c ||| \mathbf{R}} \cdot \| u_0 \|_{\mathbf{R}}) \times$$

$$\times \exp\left(3\tau^2 ||| c |||^2_{\mathbf{R}} + 3\tau^2 ||| b' |||^2_{L(H)} + \frac{3}{2}\tau ||| \hat{\tilde{V}}' |||^2_{\hat{L}(H,H)} \right) \quad (x \in H;\ 0 \leqslant t \leqslant \tau). \qquad (15)$$

Зауваження. Якщо коефіцієнт рівняння і початкова функція належать класу C_1, то узагальнений розв'язок задачі, яка розглядається, також належить до цього класу і підпорядковується оцінці (15).

4. Оцінку гессіана можна одержати тим же шляхом, лише з деякими технічними ускладненнями. Рівняння для u'' має вигляд (12) в просторі $H_1 = L_2(H,\ H)$ при

$$(\alpha(h, B) h_1, h_1)_H = 2((V(x) h)' h_1, B h_1)_H;$$

$$(c_1(B) h, h)_H = c(Bh, h)_H + 2(b'(x) h, Bh)_H + ((\mathrm{Sp}\, A(x) B)'' h, h)_H;$$

$$(fh, h)_H = -2(c', h)_H (u', h)_H - (b''(h, h), u')_H - c''(h, h) u$$

$$(h, h_1 \in H,\ B \in L_2(H, H)).$$

Нерівність (13) дає оцінку гільберто-шмідтовської норми гессіана, яку наведемо в теоремі.

Теорема 2. *При умовах теореми 1 виконується оцінка*

$$\| u''(t, x) \|_{L_2(H,H)} \leqslant \sqrt{3}\, (||| u_0'' |||_{L_2(H,H)} + 2\tau ||| c' |||_H \cdot ||| u' ||| + ||| b'' |||_{L(L_2(H,H)H} -$$

$$- ||| u' ||| + ||| c'' |||_{L_2(H,H)} ||| u |||_{\mathbf{R}}) \exp\left(\frac{9\tau^2}{2} ||| c |||^2_{\mathbf{R}} + 18\tau^2 ||| b' |||^2_{L(H,H)} + \right.$$

$$\left. + \frac{9\tau^2}{2} ||| A'' |||^2_{L(L_2(H))} + 6\tau ||| \tilde{\tilde{V}}' |||^2_{\hat{L}(H,H)} \right). \qquad (16)$$

Для того щоб одержати кінцевий результат, треба в праву частину (16) підставити вже знайдену оцінку для u' і очевидну для u. Відзначимо прості оцінки, які одержуємо з (15) і (16) для випадку, коли $\mathfrak{L}$ — однорідний диференціальний оператор другого порядку, тобто $b \equiv c \equiv 0$:

$$||| u' |||_H \leqslant \sqrt{3}\, ||| u_0' |||_H \exp\left(\frac{3}{2}\tau \| \hat{\tilde{V}}' |||^2_{\hat{L}(H,H)} \right);$$

$$||| u'' |||_{L_2(H,H)} \leqslant \sqrt{3}\, ||| u_0'' |||_{L_2(H,H)} \exp\left(\frac{9\tau^2}{2} ||| A'' |||^2_{L(L_2(H))} + 6\tau ||| \hat{\tilde{V}}' |||^2_{\hat{L}(H,H)} \right).$$

5. Розглянемо тепер задачу Коші для рівняння (2) в нескінченновимірному гільбертовому просторі H. Нехай $V(x) \in L_2(H,\ H)$ $(x \in H)$. Вираз (5) і в цьому випадку є розв'язком (див. [5]), хоч сам вінерівський процес «вміщується» лише в деякому розширенні простору H. Можна показати, що при $\alpha \in L_2(H \times H_1;\ H_1)$ формула (9) і оцінки (10), (11) зберігаються. Далі неважко перевірити, що зберігаються записані в інваріантній формі рівняння для u' і u''. Все це свідчить, що для похідних задачі Коші (2) і в нескінченновимірному випадку зберігаються оцінки (15), (16).

Відзначимо, що користуючись тим же методом, можна оцінити й похідні вищого порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. Я., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967, 736 с.
2. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., «Наука», 1964, 443 с.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968, 424 с.
4. Далецкий Ю. Л., Тетерина Н. И. Мультипликативные стохастические интегралы. — УМН, 1972, 27, вып. 2, с. 167—168.
5. Далецкий Ю. Л. Бесконечные элиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения. — УМН, 1967, 22, вып. 4, с. 3—54.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965, 654 с.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наук. думка», 1968, 353 с.

Київський політехнічний інститут

Надійшла до редакції 10.VI 1975 р.